非可換岩澤主予想と同変玉河数予想について

玉河数予想：（モチーフの）L 関数の整数点での値を記述

- 超越部分
  - Pierre DELIGNE ドリーニュの C^+ 周期（クリチカルな場合）
  - Alexander BEĬLINSON レギュレーター
- 有理部分
  - Spencer BLOCH
  - 加藤和也

  → "モチーフィーク玉河数"

⇝

- Jean-Marc FONTAINE
- Bernadette PERRIN-RIOU
- 加藤和也

→ ディターミナント関手を用いた洗練化

☆ David BURNS, Mathias FLACH 同変玉河数予想.
(FUKAYA-KATO)

§ ディターミナント関手

・R：可換環 (Finn Faye KNUDSEN, David MUMFORD)

$$\underbrace{\mathcal{L}_{gr}(R) = \{(L,\mu)}_{\text{次数付可逆加群の圏}} \mid L : \text{rank } 1 \text{ proj. } R\text{-module},\ \mu : \text{locally const. fct. on } (\operatorname{Spec} R)\} \text{ の成す圏}$$

単位元 $(R,0)$

$$\det_R : \mathrm{Proj}(R)_{isom} \longrightarrow \mathcal{L}_{gr}(R)$$ と定める

射 isom に制限

$$P \longmapsto (\Lambda^{max} P,\ \operatorname{rank} P)$$

* $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ (e)

$\Longrightarrow \exists \det_R(P) \xrightarrow{\cong} \det_R(P') \cdot \det_R(P'')$

☆ これは

$$\det_R : \mathcal{C}^{Perf}(R)_{qisom} \longrightarrow \mathcal{L}_{gr}(R)$$ に拡張可能

bdd な f.g. proj. R-module の複体と qisom になるようなものの圏

$$C = (C^i)_i \longmapsto \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det_R^{(-1)^i} C^i$$

・$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$ (e)

$\Longrightarrow \det_R C \xrightarrow{\cong} \det_R C' \cdot \det_R C''$

・C：acyclic (i.e. $0 \sim C$) $\Longrightarrow$ acyc：$\det_R C \xrightarrow{\cong} \det_R(0) = (R,0)$

例 p, ℓ：素数，V：有限次 $\mathbb{Q}_\ell$-ベクトル空間 ⟲ $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$

$$C_f(\mathbb{Q}_p, V_\ell) := \begin{cases} [V^{I_p} \xrightarrow{1-\varphi_p} V^{I_p}] & \ell \neq p \\ [D_{crys}(V) \xrightarrow{(1-\varphi_p,\ id)} D_{crys}(V) \oplus t_V] & \ell = p \end{cases}$$

幾何的フロベニウス

B_{crys} のフロベニウス

$$D_{crys}(V) = (B_{crys} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

$$D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_{\mathbb{Q}_p}}$$

$$\cup$$

$$D_{dR}^+(V) \qquad t_V = D_{dR}(V) / D_{dR}^+(V)$$

$\ell \neq p$

$C_f(\mathbb{Q}_p, V_\ell)$: acyclic　(i.e. $1-\varphi_\ell$: 同型)

$$\underset{\text{積}}{(R,0)} = \det_{\mathbb{Q}_\ell} V^{I_p} \cdot \det^{-1}_{\mathbb{Q}_p} V^{I_p} \xrightarrow{\sim} (R,0)$$

$$\xrightarrow{\det(1-\varphi_p)\cdot \mathrm{id}} \det V^{I_p} \det^{-1} V^{I_p} \;\circlearrowleft\; \| $$

$$\det(1-\varphi_p \mid V_\ell^{I_p}) = \underbrace{P(V_\ell^{I_p}, 1)}_{\text{local factor}}$$

- R : 非可換　(Pierre DELIGNE)

  $\exists V(R)$: Picard 圏　(可換対象の圏)

  $\exists \det_R : \mathcal{C}^{Perf}(R)_{qisom} \longrightarrow V(R) \ni \mathbb{1}_R$

  上のような性質をみたす

- $\pi_0 V(R) \xrightarrow{\sim} K_0(R)$

  $\underset{\text{同型類}}{\ } \quad [P] \longleftarrow [P]$

- $\pi_1 V(R) = \mathrm{Aut}\, \mathbb{1}_R \xleftarrow{\sim} K_1(R)$

  $[\mathbb{1}_R = \det P \det^{-1} P \underset{\det(f)\cdot \mathrm{id}}{\longrightarrow} \mathbb{O} = \mathbb{1}_R] \longleftarrow [f : P \xrightarrow{\sim} P]$

§2 テイトモチーフの玉河数予想

$F'/F/\mathbb{Q}$: 代数体，　Σ : Fの有限素点でF'で分岐，$\#\Sigma < \infty$

$\mathbb{Q}(m)_{F'/F} = h^0(\operatorname{Spec} F')(m)$　F上定義されていると見做す

$\circlearrowleft\ \mathrm{Gal}(F'/F) =: G_{F'/F}$

簡単のため $\boxed{m<0}$ とする

$$\Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) := \det_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}(K_{1-2m}(F')^*_{\mathbb{Q}})$$

$\mathbb{Q}$-dual

$$\times \det^{-1}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}(\underbrace{\mathbb{Q}(m)^+_{F'/F}, B}) \text{ in } V(\mathbb{Q}[G_{F'/F}])$$

$$\| \qquad (\prod_{F' \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{Q}(2\pi\sqrt{-1})^m)^+$$

1. Armand BOREL のレギュレーター

$$K_{1-2m}(F')_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}(m)^+_{F'/F}, B)^*$$

$$\rightsquigarrow \vartheta_\infty : \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathbb{R}[G_{F'/F}]}$$

2. p進ホッヂ理論

$$\rightsquigarrow \vartheta_p : \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \det_{\mathbb{Q}_p[G_{F'/F}]}(R\Gamma_{c,et}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma\vee}, \mathbb{Q}_p(m)))$$

$$\uparrow$$

$$K_{1-2m}(\mathcal{O}_{F'})_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(\mathcal{O}_{F'}[\tfrac{1}{p}], \mathbb{Q}_p(1-m))$$

p進チャーン類

3. $K_1(\mathbb{C}[G_{F'/F}]) \xrightarrow{\mathrm{nrd}_{\mathbb{C}[G_{F'/F}]}} \mathrm{Centre}(\mathbb{C}[G_{F'/F}])^\times$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\rho\in \mathrm{Irr}(G_{F'/F})} \mathbb{C}^\times \ni (L^*(m,\rho))_\rho \\ \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

少しいじると

複素アルティンL函数の主要項 (leading term)

<u>Fact</u> $L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) \in K_1(\mathbb{R}[G_{F'/F}])$ と出来る.

4. 有理性予想

$\exists \vartheta_{\mathbb{Q}} : \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}$

s.t. $\vartheta_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} : \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{1}_{\mathbb{R}[G_{F'/F}]}$

$\quad \| $

$L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) \circ \vartheta_\infty$

<u>玉河数予想 (p-part)</u>

$$\begin{array}{ccc} \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{Q}_p} & \xrightarrow[\sim]{\vartheta_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_p} & \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_p[\mathrm{Gal}(F'/F)]} \\ \wr\| \, \vartheta_p & \circlearrowleft & \nearrow \wr \ \text{acyc.} \end{array}$$

$\det_{\mathbb{Q}_p[G_{F'/F}]} \underline{R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Q}_p(m))} \leftarrow$ acyc

<u>例</u> $F' = F$: tot. real $m < 0$ odd

$$|\zeta(m)|_p^{-1} = R \, \frac{\# |H^2_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))|_p^{-1}}{\# |H^1_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))|_p^{-1}}$$

p-part of coh Lie conj.

↑

岩澤主予想 (Andrew WILES)

§3. クリティカル テイト モチーフ の場合

F'/F : tot. real $m < 0$

$$K_0(\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]) \to K_1(\overline{\mathbb{Q}}_p[G_{F'/F}]) \xrightarrow{\partial} K_0(\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}], \overline{\mathbb{Q}}_p[G_{F'/F}])$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\overline{\mathbb{Q}}_p} & \underset{\text{eTNC}}{\overset{=}{\longmapsto}} & [\det R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))] \end{array}$$

BURNS -VENJAKOB $\rightarrow \uparrow$ $\quad R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F^\infty}^{\Sigma^\vee}, \Lambda(G_\infty)(1))$

$\quad \|$

$\xi_{F^\infty/F} \longmapsto -[R\mathrm{Hom}(R\Gamma(\mathcal{O}_{F^\infty}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)]$

MC of Iwasawa Main conj.

$$\begin{array}{l} F^\infty \\ | \\ F' \\ | \\ F \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array} \qquad G_\infty = \mathrm{Gal}(F^\infty/F), \quad G_{F'/F} \text{ finite}$$