非可換岩澤主予想と同変玉河数予想について

原 隆

九州代数的整数論 2010　 March 18, 2010

講演中玉河数予想の主張及び非可換岩澤主予想の応用の部分が大分駆け足になってしまったので，補足をさせていただきたい．

1　テイトモチーフの同変玉河数予想

p を素数，F を代数体とし，Σ を p 上の素点をすべて含む F の有限素点の有限集合とする．代数拡大 E/F に対し，$\Sigma^\vee$ で Σ 上の E の有限素点と無限素点の合併集合を表すこととする．

さて，有限次代数拡大 F'/F に対し，テイトモチーフ $\mathbb{Q}(m)_{F'/F} = h^0(\operatorname{Spec} F')(m)$ を F 上定義されたモチーフと見做し，ガロワ群 $G_{F'/F} = \operatorname{Gal}(F'/F)$ が同変に作用しているとする．以下 $m < 0$ と仮定する．

$$\Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) = \det{}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}(K_{1-2m}(F')^*_{\mathbb{Q}}) \cdot \det{}^{-1}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}(\mathbb{Q}(m)^+_{F'/F,B})$$

とおく (フォンテーヌ–ペラン-リウの fundamental line)．但し * はベクトル空間としての双対，$_B$ はベッチ実現，$^+$ は複素共役の作用で固定される部分空間を表す．

Step 1. ボレルのレギュレーター写像

$$R_{1-2m}\colon K_{1-2m}(F')_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \left(\prod_{F' \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{R}((2\pi\sqrt{-1})^{-m})\right)^+$$

により，自明化 $\vartheta_\infty\colon \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathbb{R}[G_{F'/F}]}$ が得られる ($\mathbf{1}_{\mathbb{R}[G_{F'/F}]}$ は単位対象)．

一般に ϑ_∞ は，ドリーニュ周期及びレギュレーターの情報を表す．

Step 2. 導来圏の計算及び p 進ホッジ理論を用いることに依って，同型

$$\vartheta_p\colon \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \det{}_{\mathbb{Q}_p[G_{F'/F}]}(R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}^{\Sigma^\vee}_{F'}, \mathbb{Q}_p(m)))$$

を得る (右辺はコンパクト台付きエタールコホモロジーを導来圏で考えたもの．本質的には p 進チャーン類写像による K_1 群とエタールコホモロジーの間の同型射から誘導される)．

一般に ϑ_p は，p 進周期及び p 進レギュレーターの情報を表す．

Step 3. 被約ノルムとウェッダーバーン分解の導く同型

$$K_1(\mathbb{C}[G_{F'/F}]) \xrightarrow{\mathrm{nrd}} \operatorname{Centre}(\mathbb{C}[G_{F'/F}])^\times \xrightarrow{\sim} \prod_{\rho \in \operatorname{Irr}(G_{F'/F})} \mathbb{C}^\times$$

に依って複素アルティン L 関数の $s = m$ での主要項 (leading term) を集めたもの $(L^*(m,\rho))_{\rho \in \operatorname{Irr}(G_{F'/F})}$ と対応する K_1 の元を $L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F})$ と定める．これは $K_1(\mathbb{R}[G_{F'/F}])$ の元と見做せる．[1]

[1] 実は被約ノルムは $\mathbb{R}$ 係数では全射とならないので，少し変形する必要があるが，細かい話なので省略する．

Step 4. **有理性予想**

自明化 $\vartheta_{\mathbb{Q}}\colon \Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}$ が存在し，$\vartheta_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R}$ は $L^*(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) \circ \vartheta_\infty$ と一致する (L^* を単位対象上の同型射と見做している．ゼータ関数の主要項がレギュレーター項を除くと有理的となることを主張する予想).

Step 5. **同変玉河数予想** (p **部分**)

自明化 $\vartheta_{\mathbb{Z}_p}\colon \det_{\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]}(R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]}$ が存在し，$\vartheta_{\mathbb{Z}_p} \otimes \mathbb{Q}_p$ が $(\vartheta_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{Q}_p) \circ \vartheta_p^{-1}$ と一致する．

例 1. F 及び F' が総実で m が負の奇数となる場合，$\mathbb{Q}(m)_{F'/F}$ はドリーニュの意味でクリティカルとなる: 特に，$\Xi(\mathbb{Q}(m)_{F'/F}) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}[G_{F'/F}]}$ かつ $\vartheta_\infty = \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathbb{R}[G_{F'/F}]}}$．この場合，有理性予想は $(L(m,\rho))_{\rho \in \mathrm{Irr}(G_{F'/F})}$ が複素数体の $\mathbb{Q}$-同型写像に対して不変となることと同値であるが，これはクリンゲンとジーゲルによる古典的な結果 (部分ゼータ関数の負の奇数での整数点の値が有理数となること) から従う．

また，(本質的にクリティカル性から) $R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Q}_p(m))$ は非輪状である．特に $F' = F$ の場合を考えると，非輪状性から誘導される標準的写像 acyc は整係数コホモロジー位数の交代積 $\prod_{i \in \mathbb{Z}} |\sharp H^i_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))|_p^{-1}$ 倍する写像と見做すことが出来る．したがって，玉河数予想の p-部分は

$$|\zeta_F(m)|_p^{-1} = \frac{|\sharp H^2_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))|_p^{-1}}{|\sharp H^1_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(m))|_p^{-1}}$$

が ($\mathbb{Z}_p$ の単元倍を除いて) 一致することを主張している．この事実はメイザー，ワイルズに依って示された岩澤主予想に岩澤降下を適用することで直ちに従う．

2　非可換岩澤主予想と降下理論

先の例を同変版に一般化しよう．F_∞/F を総実代数体の総実 p-進リー拡大で Σ でのみ分岐し，$F(\mu_{p^\infty})^+$ を含むものとする．簡単のため岩澤の $\mu = 0$ 予想を仮定する．F_∞/F のガロワ群を G とし，$\Lambda(G)$ をその岩澤代数 ($\mathbb{Z}_p$ 上の完備群環)，$\Lambda(G)_S$ を標準オーレ局所化とする (定義は [CFKSV] 参照)．また，$\kappa\colon \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F) \to \mathbb{Z}_p^\times$ を p 進円分指標とする．

定理 2. 拡大 F_∞/F が非可換岩澤主予想を満たすと仮定する: 即ち，$K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 ξ で，全ての G のアルティン表現 ρ と全ての正の偶数 r に対して補間公式 $\rho\kappa^r(\xi) = L_\Sigma(1-r,\rho)$ を満たすものが存在し ($L_\Sigma(s,\rho)$ はアルティン L 関数の Σ に付随する局所因子を取り去ったもの)，局所化完全列

$$K_1(\Lambda(G)) \to K_1(\Lambda(G)_S) \xrightarrow{\partial} K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S) \to 0$$

の連結準同型 ∂ に対し

$$\partial(\xi) = [R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \Lambda(G)^\sharp(1))]$$

が成り立つと仮定する.[2]

このとき，F_∞/F の任意の有限次ガロワ部分拡大 F' 及び任意の正の偶数 r に対して $\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F}$ は同変玉河数予想の p 部分を満たす.

証明のスケッチ．先ず，$\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F}$ は条件からクリティカルなので，先の例の様に ϑ_∞ の自明性等が従うことに注意しよう．さて，ξ を円分指標で r 回捻ったものを $\xi^{(r)}$ とすると，構成から $\xi^{(r)}$ は補間公式 $\rho(\xi^{(r)}) = L_\Sigma(1-r,\rho)$ を満たし，さらに $\partial(\xi^{(r)})$ は $R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \Lambda(G)^\sharp(1-r))$

[2] $\Lambda(G)^\sharp$ は，G の元の逆元を右から掛ける作用で $\Lambda(G)$ を左 $\Lambda(G)$ 加群と見做したもの．

と一致する．ここで，バーンズとヴェンヤコブに依る降下理論を用いると (詳細は [BurVen] 参照)，局所化完全系列

$$K_1(\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]) \to K_1(\overline{\mathbb{Q}}_p[G_{F'/F}]) \xrightarrow{\partial_p} K_0(\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}], \overline{\mathbb{Q}}_p[G_{F'/F}])$$

に於いて等式

$$\partial_p(L_\Sigma(\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F})) = [R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_F^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]^\sharp(1-r))]$$

が成り立つ (大雑把には，全射 $G \twoheadrightarrow G_{F'/F}$ に依って図式を「降下」させる)．右辺はシャピロの補題から $R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(1-r))$ と同型．この等式はディターミナント関手の言葉で

> 或る $\det_{\mathbb{Z}_p[G_{F'/F}]}(R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Z}_p(1-r)))$ の自明化が存在して，その $\mathbb{Q}_p$ への係数拡大が $L_\Sigma(\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F}) \circ \mathrm{acyc}$ と一致する (但し acyc は $R\Gamma_{c,\acute{e}t}(\mathcal{O}_{F'}^{\Sigma^\vee}, \mathbb{Q}_p(1-r))$ の非輪状性から誘導される自明化: $\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F}$ のクリティカル性に注意)

と言い換えられる．したがって後は自明化 acyc と自明化 ϑ_p^{-1} の差を計算すればよい: その際に除かれていた $v \in \Sigma$ での局所因子達 $L_v(\mathbb{Q}(1-r)_{F'/F})$ が復元できる． $\square$

このようにクリティカルテイトモチーフの場合は古典理論と同様に，非可換岩澤主予想及び降下理論から直ちに玉河数予想が従うことが分かる．しかし，クリティカルでない場合はレギュレーター項を統制する K 群の元が必要不可欠であるように思われるが，一般の総実代数体の場合にそのような良い元が存在することは知られていないようなので，クリティカルでない場合への拡張は現時点では困難であると言わざるを得ない．

同変玉河数予想についてはバーンズ-フラックの原論文ないしヴェンヤコブの概説 (arXiv にあります) を参照．また，可換拡大の場合は千田雅隆さんの日本語の概説記事があります (千田さんのウェブページにあります)．また，今回の講演で話したことは私のプレプリント [H] の § 1.2 及び § 3.2 に基本的に即しています (他の部分は非可換岩澤主予想に関する部分なので，この部分だけ独立に読めます)．上記の説明はかなり乱暴かつ精確さを欠いた説明なので，詳細はそちらを参照してください．

お詫びと謝辞． 玉河数予想の定式化は複雑ゆえ，丁寧に解説したつもりですが，逆に記号や概念を詰め込みすぎて分かりづらい講演になってしまったように思います．偏に講演者の実力不足に由来するものです．申し訳ございませんでした．また，講演の補足プリントを作りたいという私の非常に勝手な申し出に対し快く了承してくださったばかりか，執筆用のパソコンまで貸してくださったオーガナイザーの吉田学さんに心より感謝いたします．

References

[BurVen] Burns, D., and Venjakob, O., *On descent theory and main conjectures in non-commutative Iwasawa theory*, to appear in J. Inst. Math. Jessieu.

[CFKSV] Coates, J., Fukaya, T., Kato, K., Sujatha, R., and Venjakob, O., *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005) 163–208.

[H] Hara, T., *Inductive construction of the p-adic zeta functions for non-commutative p-extensions of totally real fields with exponent p*, preprint (2009) `arXiv:0908.2178v2 [math.NT]`.