§1. Intro.

χ : mod N 原始的 ディリクレ指標

・ディリクレ関数

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

関数等式

$$L(s,\chi) = c \cdot \underbrace{\tau_\chi}_{\text{古典的な意味でのGauss和}} \cdot N^{-s} L(1-s, \chi^{-1}) \times (\Gamma\text{-因子})$$

・$a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

$$\zeta(s,a) := \sum_{\substack{n \\ n \equiv a \bmod N}} \frac{1}{n^s}$$ フルヴィッツ ゼータ関数

$$L(s,\chi) = \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(a)\zeta(s,a)$$

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \chi^{-1}(a) L(s,\chi)$$

このとき

$\zeta(s,\chi)$: 行列値 L-関数 があり

関数等式

$$\zeta(1-s,\chi^{-1}) = c N^{-4s} \cdot \underbrace{W(\chi)}_{\text{行列値 Gauss和}} \cdot \zeta(s,\chi) \overset{\Gamma\text{-因子}}{M(s)}$$

§2. 二元三次形式の空間について

K : (標数 $\neq 3$ の) 体

$$V_K = \mathrm{Sym}^3 K^2 = \left\{ f_x(u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} f_x(u,v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v \\ \quad + x_3 u v^2 + x_4 v^3 \end{array} \right\} \cong K^4$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4$$

$$\begin{array}{ccc} G_K = GL_2(K) & \curvearrowright & V_K \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ g & & f_x(u,v) \end{array}$$

$$f_{g\cdot x}(u,v) = \frac{1}{\det g} \cdot f_x((u,v)\, g)$$

$$P(x) := \mathrm{disc}\,(f_x(u,v))$$
$$= x_2^2 x_3^2 + 18 x_1 x_2 x_3 x_4 - 4 x_1 x_3^3 - 4 x_2^3 x_4 - 27 x_1^2 x_4^2$$

$$P(g\cdot x) = (\det g)^2 \, P(x)$$

$$V_K' = \{ x \in V_K \mid P(x) \neq 0 \}$$

$$S_K = \{ x \in V_K \mid P(x) = 0 \}$$

§3 $\mathrm{Sym}^3 \mathbb{F}_p^2$ の $GL_2(\mathbb{F}_p)$-軌道

p: 素数 $\neq 3$

以下 $k = \mathbb{F}_p$ とする

(i) S_k の G_k-軌道

$s_0 = (0,0,0,0)$, $s_1 = (1,0,0,0)$, $s_2 = (0,1,0,0)$

$S_0 = G_k \cdot s_0$

$S_1 = G_k \cdot s_1 = \{ f_x(u,v) \in V_k \mid f_x(u,v)$ は3重根をもつ$\}$

$S_2 = G_k \cdot s_2 = \{ \quad \cdot \quad \mid f_x(u,v)$ は2重根と相異なる単根をもつ$\}$

(ii) V_k' の G_k-軌道

$x_{\mathrm{I}} = (0,1,1,0)$, $x_{\mathrm{II}} = (r,0,-1,0)$

$$x_{\mathrm{III}} = \begin{cases} (s,0,0,-1) & p \equiv 1 \mod 3 \\ (a,0,b,c) & p \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

但し $r \in k^\times \setminus (k^\times)^2$, $s \in k^\times \setminus (k^\times)^3$

$aX^3 + bX + c$ は既約

$V'_{\mathrm{I}} = G_k \cdot x_{\mathrm{I}} = \{ x \in V_k' \mid k(x) = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \}$

$V'_{\mathrm{II}} = G_k \cdot x_{\mathrm{II}} = \{ x \in V_k' \mid k(x) = \mathbb{F}_{p^2} \times \mathbb{F}_p \}$

$V'_{\mathrm{III}} = G_k \cdot x_{\mathrm{III}} = \{ x \in V_k' \mid k(x) = \mathbb{F}_{p^3} \}$

$x \in V_k'$ に対し ${}^\exists k(x)$: k上3次分離代数が定まる

§4. 軌道 Gauss 和

ψ: $\mathbb{F}_p^\times$ の指標 ($\psi(0) = 0$ とする)

$\langle X \rangle = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p} \tilde{X} \right)$ $\quad \left(\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ X \mapsto \tilde{X} \right)$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ $\quad \in K^4$

$[x, y] = x_1 y_4 - \frac{1}{3} x_2 y_3 + \frac{1}{3} x_3 y_2 - x_4 y_1$

$A = \{ s_0, s_1, s_2, x_{\mathrm{I}}, x_{\mathrm{II}}, x_{\mathrm{III}} \}$

$v_i, v_j \in A$ として

$$W(\psi, v_i, v_j) = \sum_{g \in G(\mathbb{F}_p)} \psi(\det g) \langle [v_i, g \cdot v_j] \rangle$$

↑ 軌道 Gauss 和

すぐわかること $g_1, g_2 \in G(\mathbb{F}_p)$

$$\begin{cases} W(\psi, g_1 v_i, g_2 v_j) = \psi(\det g_1)^{-1} \psi(\det g_2)^{-1} W(\psi, v_i, v_j) \\ W(\psi, v_j, v_i) = \psi(-1) W(\psi, v_i, v_j) \end{cases}$$

また $\psi = \mathbb{1}$ (自明指標)

$W(\mathbb{1}) = \left(W(\mathbb{1}, v_i, v_j) / \# G_k v_j \right)$: 6×6 行列

このとき

$W(\mathbb{1})^2 = p^4 \cdot E_6$ (単位行列) 等が成立

<u>定理</u>（主結果）

$p \neq 3$：素数，$\psi^3 = \mathbb{1}$ を仮定

このとき $W(\psi, v_i, v_j)$ は T_x を用いて表される □