ただ1つの馴惰性重さをもつある種のガロア表現の非存在性について

- §1. 主結果
- §2. ラズミュッセン-玉川予想
- §3. 鍵

> 今日 ガロア表現の非存在性 ⟶ 幾何への応用

§1

$[K:\mathbb{Q}] < \infty$, $\ell \neq \ell_0$: 素数

$n, r, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $* := (n, r, w, \ell_0)$

$$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^* := \{\rho : \underset{\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)}{G_K} \longrightarrow GL(V) \cong GL_n(\mathbb{Q}_\ell) \mid (A)\sim(D)\}/\sim$$

(A) $\forall \lambda \mid \ell$: Kの素点 … "ℓ上で半安定"

- V は λ で $\begin{cases} \text{半安定} \\ \text{ホッジ-テイト重さ} \subset [0, r] \end{cases}$

(B) $\exists \lambda_0 \mid \ell_0$: 〃 … 「ヴェイユ予想」

- V は λ_0 で不分岐
- $\det(T - \mathrm{Fr}_{\lambda_0} \mid V) \in \mathbb{Z}[T]$
  数論的フロベニウス
- $\forall$根, $\forall \iota : \bar{\mathbb{Q}}_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$
  $|\iota\alpha|_\infty = q_{\lambda_0}^{w/2}$

(C) $\forall v \nmid \ell$: 〃 $I_v \curvearrowright V$ 冪単 "ℓの外で半安定"
vでの惰性群

(D) $\bar{\rho} \sim \begin{pmatrix} \psi_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \psi_n \end{pmatrix}$ on G_K

例 X : 滑らかで固有なスキーム$/K$

- 至る所半安定還元, $\exists \lambda_0 \mid \ell_0$ で良還元
- n : w次のベッチ数
- $w \leq r$

$\Longrightarrow H^w(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell)^\vee$ は (A)～(C) をみたす

主結果 w : 奇 または $w > 2r$

$\exists C = C(K, *) > 0$: 決定可

$\begin{cases} \ell > C \\ \ell \text{ は } K \text{ で不分解} \end{cases} \Longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^* = \emptyset$ □

§2

$$\begin{array}{l} K(\mu_\ell) \;—\; K(A[\ell]) \;—\; K(A[\ell^\infty]) \;—\; \tilde{K}_\ell \\ \;| \\ K \end{array}$$

ℓの外で不分岐な最大副ℓ拡大

定義 $g \geq 1$

有限集合

$\mathcal{A}(K,g,\ell) := \{A/K : g$次元アーベル多様体 $\mid K(A[\ell^\infty]) \subset \tilde{K}_\ell\}/\sim$

$= \left\{A/K \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ A\text{は}\ell\text{の外で良還元} \\ \cdot\ \rho_{A[\ell]} \sim \begin{pmatrix} \bar{\chi}_\ell^{a_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & \bar{\chi}_\ell^{a_{2g}} \end{pmatrix} \end{array} \right\}/\sim$ □

予想 (ラズミッセン-玉川 '08)

$\ell \gg 0 \Rightarrow \mathcal{A}(K,g,\ell) = \phi$ □

定理 (ラ-玉, '08)

$g = 1$, $K = \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \text{「類数 1 の虚 2次体」でない 2次体} \end{cases}$

⇒ 予想は正しい. □

∵ $E \in \mathcal{A}(K,1,\ell)$

$\downarrow$

$(E, C_\ell) \in Y_0(\ell)(K)$

$0 \subsetneq C_\ell \subsetneq E[\ell]$

位数 ℓ の巡回群

$\setminus\ \ell \gg 0 \Rightarrow \phi$

$K = \mathbb{Q}$ メイザー '78

$K =$ 他 百瀬 '95

$\mathcal{A}(K,g,\ell)$

$\cup$

$\mathcal{A}(K,g,\ell)_{st} := \mathcal{A}(K,g,\ell) \cap \{$至る所半安定$\}$

$\cap$

$\mathcal{A}(K,g,\ell_0,\ell)_{st} := \left\{A/K \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ A\text{は至る所で半安定} \\ \cdot\ A\text{は}\ {}^\exists\lambda_0 \mid \ell_0\ \text{で良還元} \\ \cdot\ \rho_{A[\ell]} \sim \begin{pmatrix} \psi_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \psi_{2g} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$

問 $\ell \gg 0 \Rightarrow \mathcal{A}(K,g,\ell)_{st} = \phi$? ⟶ 正しい

$\mathcal{A}(K,g,\ell_0,\ell)_{st} = \phi$? ⟶ $K=\mathbb{Q}$ 正しい

一般には嘘 □

$A \in \mathcal{A}(K,g,\ell_0,\ell)_{st} \Rightarrow V_\ell(A) \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^*$

$* = (n, r, w, \ell_0) = (2g, 1, 1, \ell_0)$

系 ${}^\exists D = D(K,g,\ell_0) > 0$:

$\begin{cases} \cdot\ \ell > D \\ \cdot\ \ell\text{は}K\text{で不分解} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}(K,g,\ell_0,\ell)_{st} = \phi$ □

注 ("主結果の証明"の系)

${}^\exists D' = D'([K:\mathbb{Q}], g) > 0$:

$\ell > D' \Rightarrow \mathcal{A}(K,g,\ell)_{st} = \phi$

§3

・証明への鍵

{ ・副惰性重さの計算
  ・カルソーの計算

<u>副惰性重み</u>

$[E:\mathbb{Q}_\ell] < \infty$. $G_E \supset I \supset I_w$ （I：惰性群、I_w：暴惰性群）

・$\rho : I \longrightarrow GL(\bar{V}) \cong GL_n(\mathbb{F}_\ell)$: 既約

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d] & GL(\bar{V}) \\ I/I_w =: I_t \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

・$\mathrm{End}_{I_t}(\bar{V}) \xrightarrow[f]{\sim} \mathbb{F}_{\ell^n}$ （シューア）

$$\begin{tikzcd} I_t \arrow[r, dashed] \arrow[dr] \arrow[rr, bend left, "\rho_f"] & \mathrm{End}_{I_t}(\bar{V})^\times \arrow[r, "\sim", "f"'] \arrow[d, hook] & \mathbb{F}_{\ell^n} \\ & GL(\bar{V}) & \end{tikzcd}$$

$$\theta_n : I_t \twoheadrightarrow \mu_{\ell^n - 1}(\bar{E}) \xrightarrow[\text{“mod } \ell\text{”}]{\sim} \mathbb{F}_{\ell^n}^\times$$

$$\sigma \longmapsto \frac{\eta^\sigma}{\eta} \quad (\eta = \sqrt[\ell^n - 1]{\pi_E})$$

π_E：Eの素元

をレベルnの基本指標という。

$\leadsto$ $\rho_f = \theta_n^{a_0 + a_1 \ell + \cdots + a_{n-1}\ell^{n-1}}$ $(0 \le a_i \le \ell - 1)$

<u>定義</u>

(1) $a_0, \dots, a_{n-1}$ を $\bar{V}$ の副惰性重さという。

(2) G_E の ℓ-進表現 V の副惰性重さを $\bar{V}|_I$ のジョルダン-ヘルダー商の副惰性重さのあつまりとする。□

<u>定理</u>（カルソー '06）

V：G_E の半安定 ℓ進表現、ホッジ-テイト重さ $\subset [0, r]$

$\Longrightarrow$ V の副惰性重さは $0 \sim e_E r$ の中 □

e_E：Eの絶対分岐指数

<u>命題</u>（鍵）

$\exists c' = c'(K, *) > 0$;

(・$\ell > c'$
  ・ℓ は Kで不分解　$\exists ! \lambda | \ell$
  ・$V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G_K)^*$

$\Longrightarrow$ $V|_{G_{K_\lambda}}$ の副惰性重さは全て $e_\lambda w/2$ □

K_λ：Kのλでの完備化

e_λ：λの絶対分岐指数