# 漸化式問題の解法

横山 俊一（九大数理）

2010 年 9 月 6 日（月）

## 1 要約

漸化式を取り扱う問題では, 必ずといってよい程その一般項 $a_n$ を求める必要がある. 大雑把に分類すると, その形は主に **11 パターン**あり, 易しいものから難しいものまで様々である. まずはこれら全てを場面に応じて使い分けられるようになることが肝要である. 以下がその 11 パターンである.

1. $a_{n+1} = a_n + f(n)$ ：階差型

   例として $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 4n + 4$ など. $a_n = 2n^2 + 2n$ が正解.

2. $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$ ：繰り下げ型

   例として $a_1 = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{a_n}{a_{n-1}} + \dfrac{2}{n+1} = 1$ など. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ が正解.

3. $a_{n+1} = pa_n + q\ (p \neq 1)$ ：1 次定数型

   例として $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3$ など. $a_n = 2^{n+1} - 3$ が正解.

4. $a_{n+1} = pa_n + q(n)\ (p \neq 1)$ ：1 次定数型

   例として $a_1 = 10,\ a_{n+1} = 3a_n - 8n - 4$ など. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 4n + 4$ が正解.

5. $a_{n+1} = qa_n^p\ (q > 0,\ a_n > 0)$ ：べき型

   例として $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 8a_n^2$ など. $a_n = \dfrac{40^{2^{n-1}}}{8}$ が正解.

6. $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{pa_n + q}$ ：基本分数型

   例として $a_1 = \dfrac{1}{5},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{4a_n - 1}$ など. $a_n = \dfrac{1}{3(-1)^{n-1} + 2}$ が正解.

7. $a_{n+1} = \dfrac{ra_n + s}{pa_n + q}\ (p \neq 0,\ ps - qr \neq 0)$ ：一般分数型

   例として $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{9a_n + 1}{a_n + 9}$ など. $a_n = \dfrac{3 \cdot 5^{n-1} + 4^{n-1}}{3 \cdot 5^{n-1} - 4^{n-1}}$ が正解.

8. $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(p+q=1)$ ：隣接 3 項間 $p+q=1$ 型

例として $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + a_{n+2}}{3}$ など. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$ が正解.

9. $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ $(p+q \neq 1)$ ：隣接 3 項間 $p+q \neq 1$ 型

例として $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ など. $a_n = \dfrac{3^{n-1} - (-2)^{n-1}}{5}$ が正解.

10. 連立漸化式 $a_{n+1} = pa_n + qb_n$, $b_{n+1} = ra_n + sb_n$

例として $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$ など. $a_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$, $b_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{4}$ が正解.

11. $a_{n+1} = f(a_n)$ ：推定型

例として $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 - 1}{n}$ など. $a_n = n+1$ が正解.

最初の 8 つは何れもよく目にする形であろうし, 然るべき問題集・参考書等で参照出来るので, 各自問題に取り組んでもらいたい[1].

最後の 3 つに関して少し補足しておこう. まず 8. は 9. の特別な場合であるから, 9. をマスターしておけば 8. は忘れてしまっても構わない. 10. は幾つか解法がある. その一つとして $a_n$, $b_n$ 何れかの漸化式に帰着するという手法があり, 例えば $a_n$ について整理すると

$$a_{n+2} = (p+s)a_{n+1} - (ps - qr)a_n$$

と変形出来る. この式を見てピンとくるならば数 III,C までを十分に勉強した人であろう. これを全て左辺に移項して

$$a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$$

とすると, これは数 C で勉強した, 行列 $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対する **Cayley-Hamilton の定理**

$$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$$

に非常に良く似ている. 実際, これはただの偶然ではなく, 密接に関連している.

11. は余り見ないかもしれない. 見たことのないパターンでも, 適当な式変形や置き換えによってパターン化出来ることも少なくはないが, いつも可能とは限らないので, こういう場合は最初の項をいくつか代入して求め, 推定するということも一つ考えておこう.

[1] 何れも基本レベルなので, 解けないとちょっと苦しいかもしれない. 煮詰まった場合は要相談.

## 2 特性方程式

関数 $f$ が次の 2 つの性質

- $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
- $f(cx)=cf(x)$ （$c$ は任意定数）

を満たすとき, 関数 $f$ は**線形**（linear）であるという．このとき, 任意の定数 $A,B$ に対して一次結合された $Ax_1+Bx_2$ に対して

$$f(Ax_1+Bx_2)=Af(x_1)+Bf(x_2)$$

が成り立つことは自明である．この線形性を利用して, 隣接 3 項間漸化式 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ を満たす数列の一般項 $a_n$ を求める解法を考えよう．

$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\cdots(1)$ において, $a_{n+2}$, $a_{n+1}$, $a_n$ をそれぞれ $t^2,t,1$ で置き換えた 2 次方程式

$$t^2-pt-q=0\quad\cdots\ (2)$$

を漸化式 (1) の**特性方程式**という．この 2 解を $\alpha,\beta$ とおく．

- **$\alpha\neq\beta$ のとき**
  - $a_n=c\alpha^{n-1}$ は (1) を満たす．なぜなら $\alpha$ は (2) の解だから $\alpha^2-p\alpha-q=0$ が成り立つ．したがって

    $$a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n=c\alpha^{n+1}-pc\alpha^n-qc\alpha^{n-1}=c\alpha^{n-1}(\alpha^2-p\alpha-q)=0$$

  - $a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ は (1) を満たす．なぜなら $\beta$ も同様に (2) の解だから $\beta^2-p\beta-q=0$ が成り立つ．したがって

    $$\begin{aligned}a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n &= (\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-p(\alpha^n+\beta^n)-q(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\\ &= \alpha^{n-1}(\alpha^2-p\alpha-q)+\beta^{n-1}(\beta^2-p\beta-q)=0\end{aligned}$$

  以上 2 つより線形性が成り立つから, $a_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}\cdots(3)$ は (1) を満たす.

- **$\alpha=\beta$ のとき**
  - $a_n=n\alpha^{n-1}$ は (1) を満たす．なぜなら (2) が重解 $\alpha$ を持つとき, 解と係数の関係から $2\alpha=p$ が成り立つ．したがって

    $$\begin{aligned}a_{n+2}-pa_{n+1}-qa_n &= (n+2)\alpha^{n+1}-p(n+1)\alpha^n-qn\alpha^{n-1}\\ &= n\alpha^{n-1}(\alpha^2-p\alpha-q)+\alpha^n(2\alpha-p)=0\end{aligned}$$

  よって線形性から $a_n=A\alpha^{n-1}+Bn\alpha^{n-1}\cdots(4)$ は (1) を満たす.

**補注：**(3), (4) の任意定数 $A,B$ は初期条件 $a_1=s$, $a_2=t$（$s,t$ は定数）を満たすように定めれば, 漸化式 (1) は一意に定まっていくから, (3), (4) が (1) の解となる.

## 3　演習問題

1. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n}a_n + 1$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n$ を求めよ.

2. 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ において, $a_1 = 1$,
$$na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \quad (n \geq 1)$$
が成り立つとき, $a_n$ を $n$ を用いて表せ. 更に $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+2}^2}$ のとき, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を求めよ.

3. 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n}{3+a_n}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）によって定める. 一般項 $a_n$ を求め, 正の整数 $m$ に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} a_n a_{n+1}$ を求めよ.

4. 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が
$$a_1 = 5, \quad b_1 = -1, \quad 3a_{n+1} = 2a_n + b_n, \quad 4b_{n+1} = a_n + 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
で定義されている. $a_n - b_n$ を $n$ の式で表し, $a_n$ を計算せよ.

5. 次の漸化式の一般項 $a_n$ を計算せよ.
   (a) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$（$n \geq 1$）
   (b) $a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$（$n \geq 1$）

6. 平面上に $n$ 本の直線があって, どの 2 本も平行ではなく, またどの 3 本も 1 点で交わらないとする. $n \geq 2$ のとき $n$ 本の直線によって出来る交点の個数 $a_n$ は
$$a_n = \frac{n(n-1)}{2}$$
であることを 漸化式を用いて 証明せよ.

**補注** この問題は漸化式を利用しなくても解ける. 問題文の主張から, 2 本の直線に対して交点が 1 個必ず存在し, その 2 本の直線の選び方を変えれば交点も異なるのだから, $n$ 本の直線から 2 本の直線を選ぶ選び方が交点の個数となり, 上の値が従う.