課題についての補足資料 1　2008 年 5 月 8 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

はじめに：この資料に書かれている内容および提出して頂いた宿題等に書いてあるコメントの文責は TA（横山）にあります。従って万一ここに誤り等が含まれていた場合も、講義をされている先生の責任ではありませんのでご注意下さい。
授業内容に関する質問は講義をされている高山先生にお願い致します。また、TA の採点に不備があったり資料の誤りを見つけた方も先生にその旨をお伝え下さい。随時改善して参ります。

コメント

- $(1,\infty)$ と $(1,\infty]$ はどう違うのか分からないというご質問を数人の方から頂きました。結論から言うとこの 2 つは**同じもの**です。イメージとしては、最初 $(1,a)$ と $(1,a]$ という 2 種類の異なる区間を考えていて、a を限りなく大きくした時どうなるか？（つまり $a=\infty$ のときどうなっているか？）を考えてみましょう。答えはどちらも「1 より大きな実数全体」となります。

  記号というものは、どういう場面で使われるかだったり慣習などで多少異なることもしばしばあります。よく分からないという場合は遠慮なく質問するか、自分で調べてみて下さい。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

問題 [1]　上限／下限と最大／最小の定義を確認するための問題でした。間違えてしまった方は定義をきちんと復習しておいて下さい。
ところで、意外に (1) の間違いが多かったようです。高校数学で出てきた「$y=x^2$ （x は全ての実数）の最大値は何か？」という問題と同じです。もちろん答えは「存在しない」ですから、$\max A=\infty$ とは書きません。但し、sup, inf については「上限（下限）が**存在しない**」ことを通例「$\sup A=\infty$」「$\inf A=-\infty$」といった具合に書きます。この 2 つの違いは特に気をつけておいて下さい。

問題 [2]　何通りかの解き方があります。主に

- $|a_{n+1}-3| \leq \dfrac{2}{3}|a_n-3|$ を示して a_1 の項まで落とし、はさみうちの原理を使う。
- 有界単調数列は収束する（Weierstrass の定理）を使い、極限値 α を求める。

のどちらかを使います。1 番目のやり方はテキストに解答が載っているようですので、それを参照して下さい。
さて、2 番目のやり方で解かれていた方のほとんどが「$\{a_n\}$ が収束すると仮定すると $\cdots$ 」という書き出しでした。また問題文に「極限**値**を求めよ」と書いてあったので「収束すると考えてよい」と思った方も多かったようです。しかし、例えば「$y=x^2$（x は全ての実数）の最大値を求めよ」という問題に対して「最大値はない」と答えるのと同じように、「極限値はない」という場合も考えられます。こういう場合はきちんと「極限値が存在する」ことを何らかの形で示す必要があります。
一方、頑張ってテキストを読んで Weierstrass の定理を使おうとされた方、いい所まで行っていますが**「$\{a_n\}$ は単調増加列だ」と勘違い**された方が多数いらっしゃいました。これは正しくありません。例えば $a_1=6$ とすると、$a_2=\sqrt{2\cdot 6+3}=\sqrt{15}<6$ で減少列になっています。

ところで、この問題では初項が決まっていません。$a_1 \geq -3/2$ であれば a_1 はどんな値でも良く、この選び方によって $\{a_n\}$ の性質が変わってしまいます。ここが少し難しかったかもしれません。答えだけ述べておきます：

- $-\dfrac{3}{2} \leq a_1 < 3$ のとき、$\{a_n\}$ は**単調増加列**
- $a_1 = 3$ のとき、全ての自然数 n に対し $a_n = 3$
- $a_1 > 3$ のとき、$\{a_n\}$ は**単調減少列**

単調増加列の場合は全ての n に対して $a_n < 3$ が成り立つ（チェックしてみて下さい）ので上に有界、単調減少列の場合は明らかに $a_n \geq 0$ なので下に有界ですから、Weierstrass の定理を適用して、極限値が存在することが分かります。

なお、問題 [2] の採点基準は

- **きちんと（大体）出来ている … ○**
- **極限値 3 は求められたが、収束性の議論が抜けている or おかしい部分がある … △**
- **その他 … 無印**

でつけています。

論理記号（$\varepsilon - \delta$ 論法）や sup, inf など、初めて見る記号がたくさん出てきますので慣れるまでは大変かと思いますが、じっくり練習を重ねてみて下さい。次第にコツがつかめてくると思います。

それでは、次回も頑張ってください☆