課題についての補足資料 4　2008 年 6 月 5 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 来週は**中間試験**ですね。かげながら応援しております。
- 今回も**無記名の答案**がありました。プリントを紛失された様で、手書きで問題を書かれている方です。お心当たりの方はお申し出ください。申し出無き場合は「未提出」として処理致します。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

問題 [**1**]　これは皆さんよく出来ていました。ていねいにグラフを描いてくれた方も多く、とても良かったと思います。答えのみ書くと

$$\arccos 1 = 0 \qquad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

です。

問題 [**2**]　さて問題はこちら。一番多かった解答は

$$y = \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

でしたが、これは**関数ではありません。**関数とは「1 つの値に対し、1 つの値を返すもの」であって、2 つの異なる値を同時に返すことはないのです[1]。

そこで次に多かった解答：

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad \cdots (*)$$

ですが、なぜ「プラスだけを選んだのか」についての理由を書いて下さった方は残念ながらいらっしゃいませんでした。双曲線余弦関数の定義

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cdots (\#)$$

より、相加相乗平均を使えば $y = \cosh x \geq 1$ がわかります。そうすると、上の（∗）式において $x \geq 1$ となるので、マイナスを選んでも log の真数部分は正となり差し支えないことが分かります。

この問題のポイントは、**定義域をどこにとるかで逆関数が決まる**こと。そこで教科書 p.36 の右上のグラフを見てみましょう。

[1] 実は 複素解析(complex analysis) という領域では、同時に複数の値を返すものも関数としてみなす流儀もあります。今皆さんが勉強している微積分学は実数直線上のおはなしですが、ちょっと進むと複素数領域上でも微積分を考えることが出来ます。高校時代から慣れ親しんできた「関数」は**一価関数**(single-valued function) と呼ぶのに対し、複数の値を返す関数を**多価関数**(multi-valued function) と呼びます。例えば z を複素数として、$f(z) = \sqrt{z}$ や $f(z) = -\sqrt{z}$ は一価関数ですが、これを一つにまとめた $f(z) = z^{1/2}$ は多価関数です。

まず、関数 $y=\cosh x$ は実数全体で定義されていますが、これを $x=0$ でちょん切ってしまって

1. x が $[0,\infty)$ を動くとき
2. x が $(-\infty,0]$ を動くとき

に分けて考えます。途中までは皆さん計算して頂いた通りで、式（#）を e^x について解けば

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2-1} \quad \cdots（☆）$$

を得ます。そこで (1) の場合は $e^x \geq 1$ ゆえ、（☆）の右辺の値が 1 以上となることと $y \geq 1$ から、逆関数は

$$y = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \qquad 但し\ x \geq 1$$

となります。一方 (2) の場合は $e^x \leq 1$ ゆえ、（☆）の右辺の値が 1 以下・$y \geq 1$ の条件から

$$y = \log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) \qquad 但し\ x \geq 1$$

が逆関数となるのです。

この問題では定義域についての指定がありませんので、きちんと場合分けをする必要があります。と言ってもこれは宿題ですので、今回を良い機会に「そういうことなんだ」と理解してもらえれば OK です。定期試験などでは混乱するため定義域は指定してもらえると思いますのでご安心ください。

それでは、中間試験も頑張ってください☆