課題についての補足資料 5　2008 年 6 月 12 日提出分 (をフライング)

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 本日提出して頂いた宿題は**来週（中間試験の日に）返却**致します。中間の範囲も含まれているかもしれませんので、解説だけ先に載せておきます。参考にしてください。

内容について

問題 [1]　f を閉区間 $[a,b]$ から $[a,b]$ への連続関数とする。このとき、$f(c)=c$ をみたす点 c が存在することを示せ。このような点 c を不動点という。

久しぶりの証明問題ですね。**中間値の定理**を使いましょう。定理のステートメント（主張）をおさらいです。

> **定理**　$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で $f(a)<\gamma<f(b)$ ならば
>
> $$f(c)=\gamma \qquad (a<c<b)$$
>
> を満たす c が存在する。

さてここでは上の定理を使うため、$g(x)=x-f(x)$ という関数を考えてみましょう。そうすると $g(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続であって

$$g(a)=a-f(a)\leq 0 \quad , \quad g(b)=b-f(b)\geq 0$$

がなりたちます（要チェック）。ここで、$g(a)=0$ or $g(b)=0$ のときは問題文の主張をみたすので、以降 $g(a)\neq 0,\ g(b)\neq 0$ と考えることにすれば $g(a)<0<g(b)$ が成り立つので、後は中間値の定理を使えば OK です。

問題 [2]　次の関数の $x=0$ における微分可能性を調べよ。

(1) $f(x)=\tan|x|-|x|$　　(2) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

答えは何れも**微分可能**です。特に (2) は微分可能ではありますが、$x=0$ で**不連続**であることに注意して下さい。$x\neq 0$ の場合で $f'(x)$ を計算し、$\lim_{x\to 0} f'(x)$ が存在しないことから微分不可能だと思ってしまう間違いがよく見受けられます。あくまでも微分係数の定義から

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

と計算しましょう。

問題 [3]　次の関数の導関数を求めよ。

$$(1)\ \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad (2)\ \arccos\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)$$

余裕のある人向けの問題でしたが、実はそんなに難しくありません。計算は少々面倒かもしれませんが … 。

合成関数の微分がきちんと使えれば、あとはていねいに計算するだけです。arctan や arccos の微分は教科書にも載っていますので、それを見ながら一度は自分でゆっくり計算してみてください。参考までに答えだけ書いておきます。

$$(1)\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \qquad (2)\ -\frac{2\sqrt{2}nx^{2n-1}}{(x^{2n}+1)\sqrt{x^{2n}+1}}$$

また皆さんの答案には個別にコメントをつけてお返し致しますので、それを見て復習しておいてくださいね。よろしくお願い致します☆