課題についての補足資料 7　2008 年 7 月 3 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- **救済レポート**を本日返却致します。中間試験の最終の点数をご確認ください。

  なお**無記名**のレポートが 1 部ありました（私の資料も一緒に綴じて提出された方です)。お心当たりの方は高山先生までお申し出ください。

  注意「12 問全て解いてください」と指示したにも関わらず一部にしか解答していない答案には得点を**半分**しか与えておりません。ご了承ください。

- **遅れて宿題を提出される方**は本日が締め切りです。

内容について

問題 [**1**]　極限値を求める問題が 3 題。全て **L'Hospital の定理**を用いて簡単に求められます。テキストでは **Cauchy の平均値の定理**を用いて解けという指示がありましたが、少し難しいと思い解き方を指定しませんでした。案の定「どうやって Cauchy の平均値の定理を使えば良いか分からない」というコメントを 5〜6 名の方から頂きましたので、ここで少し解説しておきます。
(1) を例にとり、解き方は L'Hospital の定理の証明（テキスト p56：定理 15）にならいます。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}$$

ですから、$\frac{0}{0}$ の不定形になっています。ここで $f(x)=\sin x-1,\ g(x)=\cos x$ とおくと、f,g は共に区間 $(0,\pi)$ で連続ですから、$x\neq\pi/2$ なる x に対して Cauchy の平均値の定理を用いれば、x と $\pi/2$ との間に点 k が存在して

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{f'(k)}{g'(k)}$$

が成り立ちます（$x<\pi/2$ の場合は区間 $(x,\pi/2)$ で、そうでない場合は区間 $(\pi/2,x)$ で考えれば OK)。ここで $x\to\pi/2$ とすると $k\to\pi/2$ となるので、結局

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{k\to\frac{\pi}{2}}\frac{f'(k)}{g'(k)}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}}=0$$

となり、これは L'Hospital の定理を用いた結果そのものとなります。

ちなみに計算自体はほとんどの方が出来ていました。特に (3) に関しては L'Hospital を使わずに

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$$

と計算出来てしまいますね。ちなみに答えは

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-\sec x)=0$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2}=\frac{1}{2}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=2$

となります。(2) は**テキストの略解が間違っている**ので注意してください。

それから一点注意なのですが、

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x)$$

の形の極限を求める時に、$f(x) \to \infty,\ g(x) \to 0$ だからといって $f(x)g(x) \to 0$ には**なりません。** $\infty \times 0$ **も立派な不定形**ですから、このままでは答えは求まりません。もちろん 0 になる場合もありますが、一般にはいろんな極限値をとります。同様の理由により

$$\lim_{x \to c} (f(x) - g(x))$$

で $f(x) \to \infty,\ g(x) \to \infty$ だからといって上の極限は 0 にはなりません。テキスト p.55 にこれらのまとめが載っていますので、よく読んでおいてくださいね。

問題 [2]　中間試験の範囲の復習問題です。ところでお気付きの方もいらっしゃいましたが、この関数 f の導関数 f' は微分不可能どころか**連続ですらありません。**「微分可能ならば連続」ですから、その対偶をとって「不連続」を示せれば微分不可能であることがわかりますね。

一度やっている問題なので少し採点を厳しめにしたところ、○をもらった人は 2〜3 名でした。ほとんどの方が△で

- $(-\infty, \infty)$ で f は微分可能である
- f' は $x = 0$ で不連続である

のどちらかに不足がありました。1 つめは $x \neq 0$ として

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

を求められたのは良いのですが、肝心の $x = 0$ での微分可能性をチェックし忘れていた点、2 つめは「なぜ f' が $x = 0$ で連続でないか」の理由がなかった点で減点しております。
$f'(x)$ が $x \neq 0$ で連続であることは関数を見て明らかですから、中間試験の問題 [9] にならって

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

を示せば十分、そして $f'(x)$ は $x \to 0$ としたとき**振動**する（$= \cos(1/x)$ を含んでいるため）ので連続にはならない、と一言書いてもらえれば満点というわけでした。

おまけ

これまで数名の方から**「オススメの参考書」「わかりやすい参考書」「数学が神がかり的に解けるようになる参考書」などを教えてほしい**というご意見を頂きました。
特に最後などは私が教えて欲しいくらいですが、それはともかくとして**自分にピッタリ合う本**と**先生や友達が薦める本**は必ずしも一致しないような気がします。私の場合も大抵人から薦められた本は合ったためしが無かったですし、自分のレベルと他の人のレベルは違うことがほとんどですからね。

ですから、後期も見据えて何か参考書的な物を買いたいが迷っているという方はいくつか目星をつけてから、先生や TA などに相談してみるというのも手です。いくつか図書館から引っ張り出してきて、気に入ったら購入するというのが賢い選択でしょうし、所謂「お手軽本[1]」にひっかかることもないでしょう。

それをことわった上で「私なりの」オススメ本をいくつか挙げておきますので、探す時の参考にしてください。微積分の本は星の数ほどあるので、闇雲に探すのも大変ですからね。

- **三宅敏恒著「入門微分積分」培風館**

  とにかく薄くて持ち運びに便利。高校の教科書や問題集っぽいのでとっつきやすい一方、内容も割と充実しています。同じ人の「入門線形代数」と合わせておすすめしたい**奇跡的**な一冊です。

- **杉浦光夫著「解析入門 [1]・[2]」「解析演習」東京大学出版会**

  ひょっとして**漬け物石じゃないか**と思うくらいずっしりとした三冊。皆さんの勉強している微積分は [1] にあてはまります。とはいえ、問題の豊富さは群を抜いて驚異的。頭から読むのではなく図鑑や辞書的に使うと良いかもしれません。問題演習を積みたい方にオススメです。

- **水田義弘著「詳解演習ライブラリ 2・微分積分」サイエンス社**

  私が学部生当時演習用に使っていた本です。ほとんど知られていませんが、図もきれいに載っていてぴたっと合った思い出があります。全ての問題に略解だけでなくきちんとした解答・解説が載っているので、自習書としては結構いい感じの本です。

- **高木貞治著「解析概論」岩波書店**

  ほとんどの人がオススメする、歴史的にも「名著」として名高い一冊。とはいえ私はきちんと読み通したことがないのですが（投げやりでスミマセン）一応挙げておきます。ずいぶん昔に書かれた本なのでちょっと古風な言い回しに戸惑うかもしれませんが、数学が好きな方には割とサクサク読み進めていけるのかもしれませんね。

それでは、次回もがんばってください☆

[1] 高いお金を出して買って読んでいると、最初のうちは簡単で読みやすくいいなぁと思っていても、次第に**内容がうすっぺらい**ことに気付き、結局あまり役に立たず、かといってブックオフや Amazon.com などに売ってもあまりお金にならない本のことです。