課題についての補足資料 8　2008 年 7 月 10 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 本日で前期（微積同演習 A）の講義は終了です。おつかれさまでした。
- 本日提出の宿題は補足資料と共に **7 月 24 日（木）以降** 返却致します。

  この日は授業がありませんので、**全学教育窓口**（正式名称が分かりません：本館 1F の事務室のことです）にてお受け取りください。なお、試験当日まで取りに来られなかった方には試験当日（7 月 31 日）に返却致します。

  この宿題に限り、未提出であっても平常点には影響しません。代わりに、定期試験の結果と合わせた最終得点が評定・単位認定の境目にあるという場合の判断材料として使用します。

  また、講義内容に関する質問が出来るのも今日が最後です。宿題の「質問コーナー」の欄をご活用ください。
- 先週（7 月 10 日）で未提出の宿題の提出を締め切りましたが、もしも本日解いて持ってきたという方がいらっしゃいましたら講義終了後提出してください。良いことがあるかもしれません。
- 本日講義の終わりに**定期試験用持込用紙**を配布致します。

内容について

問題 [1]　テキスト p.54 の定理 14(2) を証明するという問題で、**平均値の定理**[1]を使います。

> **定理（平均値の定理）**　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能であるとするとき、ある c が存在して次をみたす。
>
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad (a<c<b)$$

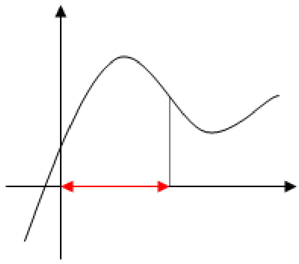
さて、示すべきは $f(x)$ が狭義単調増加であることでした。これを示すには $I=[a,b]$ として

任意の $p,q \in I\ (p<q)$ に対し $f(p)<f(q)$ がなりたつ

ことが言えれば OK なのですが、きちんと示せた方はわずかでした。

[1] 一般の平均値の定理（テキスト p50 の定理 10）のこと。前回の宿題で出てきた Cauchy の平均値の定理とは別物です。

$[a,b]$ について平均値の定理を使い $f(a) < f(b)$ を示しただけの方へ、これを示しただけでは I 上狭義単調増加は**言えません。**例えば以下のような関数を考えてみましょう。



両矢印で示された区間が $I = [a,b]$ を表すものとすると、確かに上は $f(a) < f(b)$ になっていますが、狭義単調増加になっていません。つまり区間の端と端だけを考えても不十分だということです。
ここでは $a \le p < q \le b$ をみたす区間 $[a,b]$ 上の任意の点 p, q に対し、区間 $[p,q]$ に平均値の定理を適用すれば

$$\text{ある } c \in (p,q) \text{ が存在して} \quad \frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(c)$$

がなりたちます。今、問題文の仮定より $x \in (a,b)$ で $f'(x) > 0$ だったので $f'(c) > 0$ となり、$p < q$ と合わせると $f(p) < f(q)$ がなりたちます。今 p, q は $[a,b]$ の任意の点としてとれたので、結局 $[a,b]$ 上で狭義単調増加であることが示せたことになるのです。

問題 [2]　答えは以下の通り：

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log \frac{a}{b}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to +0} x \log x = 0$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to +0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right) = -\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$

4 題全て **L'Hospital の定理**を使って求められます。(1) は $(a^x)' = a^x \log a$ の微分が出来ればあとは定理を使うだけ。(2) は

$$\lim_{x\to +0} x \log x = \lim_{x\to +0} \frac{\log x}{1/x}$$

と分母に持っていって定理を使用。(3) は通分した後 2 回 定理を使います（1 回だけでもまだ $0/0$ の不定形になっているはず）。(4) は自然対数をとって

$$\lim_{x\to\infty} \log x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

となる（途中に定理を使用）ので、真数部分の $x^{1/x}$ は $x \to \infty$ としたとき 1 に近付くことがわかります。

それでは、定期試験に向けてがんばってください☆