課題についての補足資料 ファイナル　2008 年 7 月 17 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 今回でこのシリーズもフィナーレを迎えました。今まで TA のコメントに付き合って頂いた皆様、本当に有難うございました。

  通常、通年（A & B）の講義では TA は持ち上がりになるそうですが、横山は後期の契約が未定になっておりますので、10 月からは（横山が担当する可能性もありますが）新しい TA が付くのか、はたまた TA が付かなくなるのかは不明です。おたのしみに。

  単位をゲットして、楽しい夏休みをお過ごしください。かげながら応援しております。

- 先週配付した**持込用紙**に記載されている成績に誤りを発見された方は、**定期試験当日（7 月 31 日）に 証拠品（採点済の宿題や中間試験の答案）をお持ちください。**確認のうえ修正させて頂きます。但し、答案なき場合は対応致しかねますのでご了承ください。

- 今回の宿題を提出された皆様には、最終成績が評定／単位認定の境目にある場合に**ボーナス点**を差し上げます（上限あり）。但し殆ど解いていないに等しい答案は「未提出」扱いとしております。

- 先週（7 月 17 日）遅れて宿題を提出された方、1 つにつき平常点に **1 点プラス**して差し上げます。

内容について

問題 [1]　**結構皆さん苦戦しているようにお見受けしました。**ちょっと計算が面倒くさいのと、中盤の運び方が多少難しかったかもしれませんが、**とても重要な問題 です。**試験までにしっかりと復習しておいてくださいね。

さて、まずはヒントに従ってみましょう。$f(x) = e^{x^2}$ ですから、これを微分してみると

$$f'(x) = 2xe^{x^2} = 2xf(x)$$

と書けます。さてこの $f'(x) = 2xf(x)$ という式に対して Leibniz rule を使いましょう[1]。左辺と右辺を共に n 回微分するので、

$$f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (2x)^{(n-k)} f^{(k)}(x)$$

と書けます。左辺は $f'(x)$ を n 回微分するため $f^{(n+1)}(x)$ になっていることに注意してください。$f^{(n)}(x)$ ではありません。それから微分の回数を添え字として書く際、$f^n(x)$ と書いてしまうと f の n 乗と混同するので、きちんと $f^{(n)}(x)$ という風に括弧を付けて区別してください。

[1] テキストでは「Leibniz の定理」とか「Leibniz の公式」などと呼ばれますが、諸外国では一般的に Leibniz's Theorem とか Leibniz's formula とは呼ばず Leibniz rule と呼ぶのが一般的なようです。

さて、前ページの式に戻りましょう。$2x$ は 2 回微分してしまうと消えてしまう（0 になる）ことに気をつければ、右辺の和は実質 $n-k=0$ or 1 の時だけ、即ち $k=n$ or $n-1$ の時だけを考えればよいことが分かります（他は $(2x)^{(n-k)}=0$ ゆえ、その項は消えてしまいます）。改めて書いてみると、

$$f^{(n+1)}(x) = {}_n\mathrm{C}_{n-1} 2 f^{(n-1)}(x) + {}_n\mathrm{C}_n (2x) f^{(n)}(x)$$

となるので、係数を整理すれば

$$f^{(n+1)}(x) = 2n f^{(n-1)}(x) + 2x f^{(n)}(x)$$

と書けます。さて今は $x=0$ の時を考えているので、上の式に $x=0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0) = 2n f^{(n-1)}(0)$$

を得ます。分かりやすいように左辺を n 階導関数として表せば（n を $n-1$ に置き換えて）

$$f^{(n)}(0) = 2(n-1) f^{(n-2)}(0) \qquad \cdots（＊）$$

となります。ここまでが前半戦です。

さて、ここまではうまくいったけれどこの先が出来なかったという方も多かったようです。何とかして f を消したいと思ってもどうやって良いか分からなかったという意見が目立ちました。

まずは $f(0)=1,\ f'(0)=0$ をふまえて、上の（＊）式をじっとながめてみましょう。n を含む式をかけることで $n-2$ 階導関数が n 階になっていますね。そうすると n が奇数の場合はどうなるでしょうか。これは $f'(0)=0$ なのですから、上の式に従えば $f^{(3)}(0)=4f'(0)=4\cdot 0=0$, $f^{(5)}(0)=8f^{(3)}(0)=8\cdot 0=0, \cdots$ という具合にすべて 0 になっていることが分かりますね。
続いて n が偶数の場合を見ていきましょう。

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= 2(n-1)f^{(n-2)}(0) \\
&= 2(n-1)\left\{2(n-3)f^{(n-4)}(0)\right\} \\
&= 2^2(n-1)(n-3)f^{(n-4)}(0) \\
&= 2^3(n-1)(n-3)(n-5)f^{(n-6)}(0) \\
&= \cdots \\
&= 2^{n/2}(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\cdot f(0) \\
&= 2^{n/2}(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3 \\
&= 2^{n/2}(n-1)!!
\end{aligned}$$

最後の行にある $(n-1)!!$ は 1 つ飛ばしの階乗を表します。例えば $7!!=7\cdot 5\cdot 3\cdot 1=105$ という具合です。この記号については知っている人とそうでない人がいると思いますので、無理に使う必要はありません。また、テキストの流儀では奇数と偶数とを区別して、次のように書きます。

- $n=2k-1$ のとき $f^{(2k-1)}(0)=0$
- $n=2k$ のとき $f^{(2k)}(0)=2^k(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3=2^k(2k-1)!!$

なじみ易い方をお選びください。いずれにしても、n が偶数の場合と奇数の場合できちんと求められていれば OK としています。

続いて (2) ですが「おつりの項」の部分まできちんと書いてください。確かにこの問題は n 階導関数の値を書き下すのは面倒ですが、それが問題ですので我慢して書いてみましょう。答えは例えば以下のように書けるでしょう（但し $0 < \theta < 1$ とする）。

- n が偶数のとき $f(x) = 1 + \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{12}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{2^{(n/2)-1}(n-3)(n-5)\cdots 5\cdot 3}{(n-2)!}x^{n-2} + R_n(x)$

  但し $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$　$\leftarrow$ このとき $f^{(n)}(0) = 2^{n/2}(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3$

- n が奇数のとき $f(x) = 1 + \dfrac{2}{2!}x^2 + \dfrac{12}{4!}x^4 + \cdots + \dfrac{2^{(n-1)/2}(n-2)(n-4)\cdots 5\cdot 3}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$

  但し $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$　$\leftarrow$ このとき $f^{(n)}(0) = 0$

同じ n 次のおつりの項を表していても、n の偶奇によって導関数が違っていることに注意してください。ここはなかなか理解しづらい所だと思いますから、じっくり考えてみてくださいね。

問題 [2]　示すべき式は

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} > \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}$$

でしたが、どうも x の範囲の指定が無かったようです。この問題では $-\pi \leq x \leq \pi,\ x \neq 0$ で考えてください。

この問題でも [1] と同様に Maclaurin の定理を使って示すのですが、今度は**おつりの項をうまく評価できるか**がポイントです。試しに一般項まで書き下してみると次のようになります[2]。

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

この式はテキスト p.67 にも載っています。他にも色々な関数の Taylor / Maclaurin 展開が載っているので、一度は目を通しておきましょう。
さてここまで出来ればあとはカンタン。まずは $n = 1$ の場合を考えてみると

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + (-1)^2\frac{\sin\theta x}{3!}x^3$$

であり、最後の項が正であることから $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2!}$ が従います。一方 $n = 2$ の場合を考えると

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^3\frac{\sin\theta x}{5!}x^5$$

であり、最後の項が負になることから $\cos x < 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!}$ が分かります。この 2 つを合わせて、示したい式を得ます。

[2] **答案の「注意」マークについて：**展開式を書かれた方の答案には「注意」マークがついているはずです。これは、おつりの項に出てくる $(-1)^{n+1}$ という項の意味が本当に分かっているかどうかの確認のためです。一つ前の項に $(-1)^n$ という項があるため、その次の項だから $(-1)^{n+1}$ と n を 1 つ増やしている**わけではない**ことに注意してください。この $(-1)^{n+1}$ は、Maclaurin 展開による $\cos x$ の多項式表示（つまりおつりの項を除いた右辺のこと）の値が、元の関数（$\cos x$ のこと）に比べて大きいか小さいかを表しています。今 $-\pi \leq x \leq \pi,\ x \neq 0$ で考えているため、$\sin(\theta x)x^{2n+1}$ は常に正の値をとります（$\sin(\theta x)$ の正負と x^{2n+1} の正負が一致するため）。このことから、n が奇数の場合は元の式のほうが大きく、n が偶数の時は多項式表示（おつりの項を除いた右辺）のほうが大きいということが分かります。少し納得しづらいかもしれませんが、一度よく考えてみてくださいね。

おまけ

定期試験に関するアドバイスを最後に。

- **L'Hospital の定理**を使った極限値の計算は、宿題でも 2 度登場していますので**重要度は高いでしょう。** L'Hospital を使えるのは分子・分母が共に 0 に収束するか共に ∞ に発散するかのどちらかにしか使えません。そのため、これ以外の不定形になっている場合はうまく式変形をして L'Hospital の使える不定形の形へ持っていく作業が必要です。

  また、1 度だけ定理を使ってもまだ不定形の場合もあります。こういう場合はあきらめずにもう一回定理を使ってみるというのも手です。

- 計算問題はたくさん出ると思いますが、証明問題ももちろん出ます。特に今回の宿題（Taylor 展開や Maclaurin 展開、その誤差評価）は微積分では非常に重要なテクニックが詰まっています。自分の言葉で証明を書く練習をしておくと、本番で時間をロスしなくなります。持込用紙もふんだんに活用してくださいね。

  また、基本的な関数・よく使う関数の n 回微分をどうやって求めるかも大事な問題です。Leibniz rule などの公式を用いて導くようなケースもありますから、なるべく色々な解法に触れておくことが大切です。

- 答案を書く際は「他人に見てもらう」ということを意識して書くようにしましょう。読みやすい答案には部分点も付きやすいですので、そうでない答案はそういう意味では損をしています。

  文字が美しいとかではなく、読みやすい答案を作れるかどうかは、数学的によく分かっているかという事に密接に関係しています。また自分で書いていて間違いを見付けやすいなど、自分へのメリットもあります。少し気をつけてみてくださいね。

それでは、定期試験もがんばってください☆