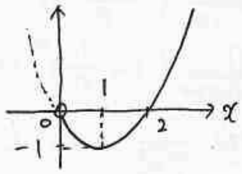
微分積分学・演習 A 中間試験 (2008 年 6 月 19 日 14:50–16:20) 1 枚目（表面）

学籍番号	氏　名	得　点
	TA	/76

注意事項：（１）問題・答案用紙（両面）２枚、計算用紙２枚,（２）持込可：用紙１枚

[1] 次の集合の上限、最大値、下限、最小値を求めよ。(2×8)

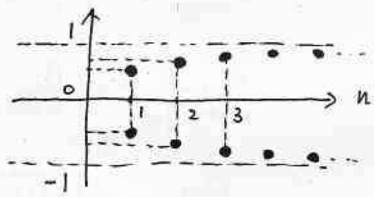
(1) $\{\, x^2-2x \mid x>0 \,\} = A$ とおく.



$\sup A = \infty$　　$\inf A = -1$

$\max A$: なし (存在しない)　　$\min A = -1$

(2) $\left\{ \dfrac{n}{n+1} \,\middle|\, n=1,2,\dots \right\} \cup \left\{ \dfrac{-n}{n+1} \,\middle|\, n=1,2,\dots \right\} = B$ とおく



$\sup B = 1$　　$\inf B = -1$

$\max B$: なし (存在しない)　　$\min B$: なし (存在しない)

[2] 数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} \quad (n=1,2,\cdots)$$

(1) すべての自然数 n に対して、$a_n < 2$ が成り立つことを示せ。(5)

帰納法で示す. $n=1$ の時は OK.

n の時成り立つと仮定すると.　　この記述不足に注意

$a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} < \sqrt{2+2} = 2$　　$\therefore$ $n+1$ の時も成り立つ

故に全ての n に対して　$\underline{a_n < 2}$ //

(2) $\{a_n\}$ は狭義単調増加であることを示せ。(5)

「全ての n に対して　$a_{n+1} > a_n$」を帰納法で示す.

$n=1$ のときは　$a_2 - a_1 = \sqrt{a_1+2} - a_1 = \sqrt{3}-1 > 0$　より OK.

n の時成り立つと仮定すると (即ち　$a_{n+1} > a_n$ が成り立つとすると)

$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} + \cancel{2} - (a_n + \cancel{2}) = a_{n+1} - a_n > 0$ (仮定より)　$\therefore$ $a_{n+2}^2 > a_{n+1}^2$

定義より全ての n に対して $a_n > 0$　$\therefore$ $a_{n+2} > a_{n+1}$　$\therefore$ $n+1$ のときも成り立つ.

$\therefore$ $\underline{\{a_n\} \text{ は狭義単調増加}}$ //

(3) $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。(10)

(1)(2) より. $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加列.

Weierstrass の定理より. $\{a_n\}$ は収束する. そこで $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とおけば.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 2}$$

$$a = \sqrt{a+2}$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$(a+1)(a-2) = 0$　　$a>0$ より.　$\underline{a=2}$ //

微分積分学・演習 A 中間試験 (2008 年 6 月 19 日 14:50–16:20) 1 枚目（裏面）

[3] 次の極限を求めよ。(10 × 2)

(1) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^{-n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \underline{e}$ //

注 $\lim_{n\to\infty}\left(1\underset{\text{マイナス}}{-}\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ と $\lim_{n\to\infty}\left(1\underset{\text{プラス}}{+}\frac{1}{n}\right)^n = e$ と

混同しないよう注意して下さい。

計算の仕方によっては前者を使うことになります。

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{n+1}}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{\to \frac{1}{e}}} = \underline{e}$ //

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ （ただし、次の命題 (*) を用いてよい。）

(*) $a_n > 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} \to a\ (n\to\infty)$ ならば、$\sqrt[n]{a_n} \to a\ (n\to\infty)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ 　$a_n = \frac{n^n}{n!}$ とおく。このとき $a_n > 0$ であり。

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{n!}\,\cancel{(n+1)}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

故に、$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n}} = \underline{e}$ //

[4] $x = \log(1+t)$ とおくことにより、次を示せ。(10)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$x = \log(1+t)$ とおく。 $x \to 0$ のとき $t\to 0$ であるから。

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)-1}{\log(1+t)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log(1+t)}{t}}$

$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \frac{1}{\log e} = \underline{1}$ //

[5] 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が、点 $\alpha \in I$ において連続であることの定義を、ϵ-δ 論法で表せ。(10)

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ s.t. $\forall x \in I,\ |x-\alpha| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(\alpha)| < \varepsilon.$

微分積分学・演習A 中間試験 (2008年6月19日14:50–16:20) 2枚目（表面）

学籍番号	氏名	得点
	TA	/74

注意事項：（1）問題・答案用紙（両面）2枚、計算用紙2枚,（2）持込可：用紙1枚

[6] 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、$f(a), f(b) \in [a,b]$ をみたすとする。中間値の定理を用いて、$f(c)=c$ となる $c \in [a,b]$ が存在することを示せ。(10)

$g(x) := x - f(x)$ とおく。このとき $g(x)$ は $[a.b]$ 上連続。

更に、$g(a) = a - f(a) \leq 0$，$g(b) = b - f(b) \geq 0$ となる $\left(\because f(a).\ f(b) \in [a.b]\right)$

ここで $g(a)=0$ または $g(b)=0$ のときは問題文の主張をみたすので、

以下 $g(a) \neq 0$，$g(b) \neq 0$ で考えると $g(a) < 0 < g(b)$ が成り立つ。

よって、中間値の定理より。$\exists c \in (a.b)$，s.t. $g(c)=0$ が成り立つ。

(a と b は除いている)

$\therefore\ c - f(c) = 0 \quad \therefore\ f(c) = c$ //

[7] 次の問に答えよ。

(1) 双曲線余弦関数 $y = \cosh x$ は、$(-\infty, 0]$ で狭義単調減少関数である。この範囲における逆関数を求めよ。(10)

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x + e^{-x}$$

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\therefore\ e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

$(-\infty, 0]$ 上で考えているから。

$$e^x = y - \sqrt{y^2-1}$$

$$\therefore\ x = \log\left(y - \sqrt{y^2-1}\right).$$

x と y を入れかえて。

$$y = \cosh^{-1} x = \log\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) \text{ //}$$

(2) (1) で求めた逆関数 $y = \cosh^{-1} x$ の微分を求めよ。ただし、関係式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を用いてよい。(10)

(解法1)

$$y = \cosh^{-1} x \iff x = \cosh y$$

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y$$

$$= -\sqrt{\cosh^2 x - 1}$$

($\because$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ を使った。マイナスが付くのは $(-\infty, 0]$ 上で考えているためです)

$$= -\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ //}$$

(解法2) (1) の結果を用いる。

$$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}\left(1 - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-1}{\cancel{\sqrt{x^2-1} - x}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2-1} - x}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \text{ //}$$

微分積分学・演習 A 中間試験 (2008 年 6 月 19 日 14:50–16:20) 2 枚目（裏面）

[8] 次の微分を求めよ。(6 × 4)

(1) $(\sqrt[3]{3x+2})' = \left((3x+2)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}(3x+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot\cancel{3}$

$= \underline{\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}}$ //

(2) $(\log(\log x))'$

$= \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} = \underline{\frac{1}{x\log x}}$ //

(3) $(\sin^{-1}\sqrt{1-x^2})'$

$= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \underline{\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}}$ //

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ と合成関数の微分を用いる. x の範囲が指定されていないため絶対値は外れません。

(~~x~~ $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ でもおまけで 0 になっているかも。)

(4) $(e^{\tan^{-1}x})'$

$= e^{\tan^{-1}x}\cdot(\tan^{-1}x)' = \underline{e^{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}$ //

[9] 関数 f, g, h をそれぞれ次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{2x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{2x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0), \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{2x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

(1) $x = 0$ で連続であるものはどれか? (5)

g, h

(2) $x = 0$ で微分可能であるものはどれか? (5)

h

(3) (2) で求めた関数について、$x = 0$ における微分係数を求めよ。(10)

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{2h}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\underbrace{h\sin\frac{1}{2h}}_{} = \underline{0}$$ //

$\left|\sin\frac{1}{2h}\right| \leq 1$ ゆえ 収束