

微分積分学・同演習B 定期試験向け練習問題

- 定期試験範囲からいくつか練習問題をご用意しました。腕試しにお使いください。
これらが大体解けるようになっていれば本番でも大丈夫でしょう
- 略解は来週の課題9 配布資料に掲載します。

練習問題 [1] 3変数関数 $f(x, y, z) = \sin(x \cos(y \sin z))$ の偏微分をすべて計算せよ。

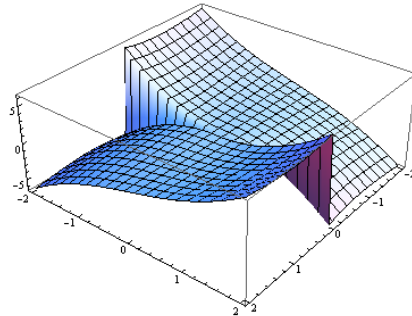
練習問題 [2] 次の (a) ~ (d) について, その性質を持つ 2 変数関数 $f(x, y)$ の例を下記選択肢¹から選びなさい。
なお、あてはまる例が下記にない場合は「なし」と答えよ。

- (a) 原点で連続だが x 偏微分不可能または y 偏微分不可能。
- (b) 原点で全微分可能だが x 偏微分不可能または y 偏微分不可能。
- (c) 原点で連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能だが全微分不可能。
- (d) 原点で連続かつ x 偏微分可能かつ y 偏微分可能かつ全微分可能。

選択肢

$$f_1(x, y) = |xy| \quad f_2(x, y) = \sqrt{|xy|} \quad f_3(x, y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{x}{|x| + h} \quad f_4(x, y) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{x\sqrt{|x|}}{|x| + h}$$

練習問題 [3] $f(x, y) = (x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ($x \neq 0$), $f(0, y) = 0$ で定義される 2 変数関数 $f(x, y)$ を考える。但しこの \arctan は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の範囲に値をもつものとする。下は $f(x, y)$ の原点付近のグラフである。



これを参考にして、次の問いに答えよ。

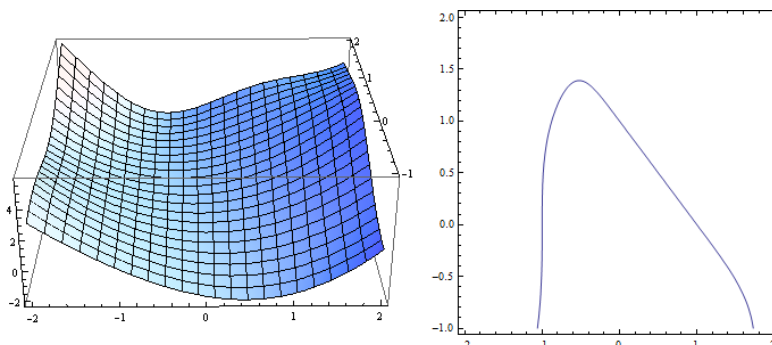
- (a) (x, y) を直線 $y = mx$ に沿って原点に近づけると、どんな直線に沿っても $f(x, y)$ はある一定の極限值をもつことを示せ²。また、その極限值は何か。
- (b) $f(x, y)$ は原点において連続か連続でないか判定せよ。

練習問題 [4] ~ [6] は裏面にあります

¹ f_3, f_4 は y に依存していない (x の 1 変数関数である) ことに注意。

² 課題 7 : 問題 1 の内容を思い出してみましょう。

練習問題 [4] 下は2変数関数 $F(x, y) = x^2 + y - 1 + \sin xy$ のグラフと、平面 $z = 0$ での切断面である。



点 $P(1, 0)$ のまわりで $F(x, y) = 0$ の陰関数 $y = \varphi(x)$ が定義出来ることを示せ。また、点 P における微分係数を計算せよ。

練習問題 [5] 次の問いに答えよ。

- (a) 2変数関数 $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ ($0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$) の極大極小を論ぜよ。
- (b) 直径1の円に内接する三角形の中で、その周の長さが最大のものを決定せよ³。

練習問題 [6] 次の曲線の長さを計算せよ。

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$
- (b) $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi, a > 0$) (Asteroid)
- (c) $r = \theta^2$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) (Spiral)

これに加えて「回転体の表面積・体積」なども見直しておいてください。

³ヒント: 三角形の内角を x, y, z とおいて (a) を使う。但し少し議論が必要。