

課題についての補足資料1 2008年10月16日提出分

TA: 横山俊一(九州大学大学院数理学府修士課程1年)

コメント

- 宿題の採点方法については、講義初回の資料をご覧ください。
ちなみに、返却した答案に「はんこ」が付いている場合は「減点なし」のサインです。それ以外には減点のサインを付けています。
- 解き方がどうしても分からない場合は、間違っても良いですから自分の考えたことを答案に書いてみましょう。質問を書きおくのも良いです。
決して空白のまま提出したり「わかりません」と諦めたりしないでください。今回だけは大目に見ました(2つ以上で1点減点)が、以降は1つでもあれば減点の対象 or 再提出とします。

内容について

皆様の答案に必要なに応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

今回は計算問題(復習?)でした。以下簡単のため積分定数 C は省略します。

$$[1] \quad \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2} \right) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} \left(= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \right)$$

これは高校の復習ですね。指数関数の微分・積分です。

[2] $x = a \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とおきましょう。これは高校でもよくやるテクニックなので覚えている人も多いのでは?

しかし不定積分のケースは初かもしれませんね。大学で学んだ「逆関数」の書き方にならえば

$$t = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{もしくは} \quad t = \arcsin \frac{x}{a}$$

と書けます。これは計算の最後で t の式を x の式に戻す時に使います。これが出来れば、

- $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a |\cos t| = a \cos t$ (t の範囲より $\cos t \geq 0$)
- $dx = a \cos t dt$

となるので

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t$$

を得ます。最後に t を x の式に戻せば

$$\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

となり、これが答えです。

[3] $I = \int e^{ax} \sin bxdx$ において、部分積分法を 2 回使うのがポイントです。そうすると

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

という式を得る¹ので、 I についてこの式を整理すれば

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)$$

となり、答えが出てきます²。

今回多かった質問で「積分定数 C は省略して良いの？」というものがありません。不定積分の解が原始関数ですから、本当は積分定数が無いと正確ではありません（原始関数は 1 つではなくたくさんあるものですから、付けたほうが良いです）。しかし、見た目をスッキリさせるために積分定数は省略して書くこともあります（実際、この資料でも略しました）。特に教科書の類では一度だけ断って略しているものがほとんどですね。まあ「付けといた方が無難」かな、という所でしょう。

採点に関しては、積分定数を付けた人とそうでない人の区別はしていません。

それから積分定数を付けた方で「積分定数を付けるタイミングはいつか？」という質問をされた方へ。これは大抵の場合、積分記号が外れた時だと思います。また複雑な積分計算をやっていると、積分定数が 2 個以上必要な場合もありますが、うまくやれば 1 個にまとめたりすることもできます。

それでは、次回も頑張ってください

¹部分積分のとり方によっては、ここは少し違った形の式になるかもしれません。計算していけば答えは同じになります。

²数名の答案に「～と書いたほうが見栄えが良い(?)」的なコメントを付けましたが、あまり気にしないでください。