課題についての補足資料 2　2008 年 10 月 23 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 前回予告していた通り、空白の解答がある方は**減点 1** としました。

  ちなみに（問題文の式以外で）1 行でも解こうと何か書いている答案は、たとえ間違っていても減点していません。

- **再提出を指定された方：**提出期限は **11 月 6 日（木）まで** です。未提出の場合は**減点 2** です。ご注意ください。

- みなさんのご意見の中からいくつか：

  – **[2] の証明の問題が苦手・何かコツはありますか？**
  前期にも言ったような気がしますが、コツは「たくさん手を動かしてみること」。教科書や講義をいっぺん追っただけでは感覚がつかめません。学部 1 年生で習う微積は限られていますから、基本的なことをしっかり身に付ければ応用もすぐききます。上達のためにはまず「書いてみる」ことから。絵画や製図と同じようなものです。

  教科書に載っている証明を（じっくり）読んでいくというのもなかなか良いと思います。自分では思いつかないような証明でも、読んで納得してしまえば後はあたりまえのように使えてしまうという事もよくあります。何れにせよ、自分に合った勉強法を見つけること、これが重要です。

  – **プリントの内容は予習より復習形式が良い、更に言えば授業さえきちんと聞いていれば解ける問題を混ぜてほしい**
  前半は皆さんが良ければ要検討ですが「一回習ったから」で採点を厳しくします。それでも良いですか？

  後半は「小テスト」でやるべきこと。「宿題」は一週間（またはそれ以上）の猶予があるのですから、しっかり取り組んでもらえるような問題でないとだめだと思います。「授業を聞いて解ける問題」は試験に出ますから、ちゃんと解けるようになっておけば問題ありません。

  – **π が無理数であることの証明をしてほしい**
  Niven による証明がテキスト p83 に載っていますが、もう少し分かりやすい証明が

  http://mathematics.web.infoseek.co.jp/pdf/pi_irrational.pdf

  にあります。

  – **はんこが「ちびギャラ」**
  興味を持たれた方は http://www.bonboya-zyu.com/ もチェックしてみてください。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

[1]　前回に引き続き、原始関数を求める問題でした。

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ において、例えば $\sqrt{x} = t$ とおいてみましょう。$dx = 2tdt$ であることを用いて

$$\int \frac{1}{1+t} 2tdt = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left(t - \log(1+t)\right) + C$$

と計算できますね（但し C は積分定数）。あとは x の式に戻せば

$$2\left(\sqrt{x}-\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)+C$$

でおしまいです。ちなみに、何を t とおくかによって途中の計算式が変わります。例えば $1+\sqrt{x}=t$ とおいた方は、計算していくと

$$(\text{計算}\cdots)=2\left(1+\sqrt{x}\right)-2\log\left(\sqrt{x}+1\right)+C=2\sqrt{x}-2\log\left(\sqrt{x}+1\right)+C'$$

という感じになったはずです。上の左の式で終わっている人がほとんどでした（正解にしています）が、実はこの中の定数 2 は積分定数とまとめることができます。これで最初の式と同じ答えになるのです。

(2) $\displaystyle\int \arctan x dx$ を計算する問題でした。これには**部分積分**を使います。ちょっと意外かもしれませんね。

$$\begin{aligned}\int \arctan x dx &= x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx\\ &= x\arctan x-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+C\end{aligned}$$

計算自体はそんなに複雑ではありません。ポイントは $\arctan x$ の微分が $\dfrac{1}{1+x^2}$ である事を知っているか、という所でしょう。

[2] $\displaystyle I_m=\int\frac{dx}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}$ で

$$I_{m+1}=\frac{x-a}{2mb^2\{(x-a)^2+b^2\}^m}+\frac{2m-1}{2mb^2}I_m$$

を示せ、という問題でした。少し難しかったかもしれませんが、テキストにも載っていますし、いろいろ試してみましょう。

結論から言うと、この問題も**部分積分**を使って解きます。まず式が煩雑なので、$h(x)=(x-a)^2+b^2$ とおきます。さて、$(x-a)'=1$ であることに注目して部分積分をやってみましょう。

$$\begin{aligned}I_m &= \int\frac{dx}{h(x)^m}\\ &= \frac{x-a}{h(x)^m}+2m\int\frac{(x-a)^2}{h(x)^{m+1}}dx\\ &= \frac{x-a}{h(x)^m}+2m\int\frac{(x-a)^2+b^2-b^2}{h(x)^{m+1}}dx\\ &= \frac{x-a}{h(x)^m}+2m\int\frac{(x-a)^2+b^2}{h(x)^{m+1}}dx-2m\int\frac{b^2}{h(x)^{m+1}}dx\\ &= \frac{x-a}{h(x)^m}+2m\int\frac{dx}{h(x)^m}-2mb^2\int\frac{dx}{h(x)^{m+1}}\\ &= \frac{x-a}{h(x)^m}+2mI_m-2mb^2I_{m+1}\end{aligned}$$

という風に計算できるはずです。あとはこれを $I_{m+1}=$ の形に整理して、$h(x)$ を元の式に戻せば欲しい結果が得られますね。

次回（宿題 3）も計算問題が続きます。来週はもう少し難しくなっているかもしれませんが、使うテクニックは目新しいものではなく、ごく基本的なことだけです。今回証明してもらった問題 [2] ですが、普段これを公式として使える場面はあまり無い様な気がします。しかし、もしかすると宿題 3 では使える問題があるかもしれませんね … 。

余談：横山は毎週みなさんの答案を添削しておりますが、実は採点をする前に**質問やコメントが書いてある答案とそうでない答案とに分けて**います。そして**質問が書いてある答案から先に採点**しています。寄せられたコメントに対してじっくり時間をかけて返事を書くため、こうしているのです。
みなさんがいつもどんな所で悩んでいるか、どんな風に考えているのかを知るために大変参考になっていますし、様々なコメントがあってとても採点が楽しいです。折角の機会ですから、いろんなことを書いて活用してくださいね。

それでは、次回も頑張ってください☆