課題についての補足資料 3　2008 年 10 月 30 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 数名の方からご要望がありましたので、**中間試験の持込用紙**を早々と配布致します。しっかり試験に向けてがんばってください。また、紛失には十分お気を付けください。
- **「この場合はこういう風に積分する！」というパターンはあるのか？**という質問を何通か頂きました。確かにパターンみたいなものはありますが「これはこのパターンだな！」とひらめくには多少の**慣れ**が肝要です。間違ってもよいので、いろんな問題に接して、手を動かしてみてください。そうやって勉強したことは意外に覚えているものです。宿題はその練習だと思ってくださいね。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

いい加減原始関数は飽きてきたかもしれませんが、積分の講義なのでとっても重要な問題です。詰まってしまったりミスしてしまったという方は見直しをお願いしますね。

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ を計算します。解き方は主に 2 通りで、

- $\sqrt{x^2+1}-x=t$ とおいて変数変換
- $x=\tan\theta$ とおいて変数変換

といったものがあります。圧倒的に前半の人気が高かったようです。

まず前半、変数変換によりこれを x について解けば $x=\dfrac{1}{2t}-\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{-\left(1+t^2\right)}{2t^2}dt$ となり、また $\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1+t^2}{2t}$ ですから

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{2t}{1-t^2}\frac{2t}{1+t^2}\frac{-\left(1+t^2\right)}{2t^2}dt \\ &= \int \frac{2}{t^2-1}dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}\right|\end{aligned}$$

と計算されます。

一方、後半の解き方だと $dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ と変数変換されますから、計算していくと

$$\int \frac{1}{\sin\theta}d\theta$$

の計算に帰着されます。ここで高校の知識を持ってきて

$$\int \frac{1}{\sin\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}d\theta$$

と変形出来れば、ここでもう一発 $\cos\theta = t$ と変数変換をしてみましょう。後は簡単で、結果は

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}}\right|$$

という感じになります。

さて、この答えと前半の答えは少し違った式になっていますね？… ですが、この 2 つはどちらも正解です。一方を頑張って式変形することで、もう一方の答えを得ることができるはずです（計算問題なので、是非チャレンジしてみてください）。積分定数の部分で多少の誤差が出て来ますが、原始関数という意味では同じものです。このように、計算の方法によって答えの形が変わるということはよくあることなので、知っておいてくださいね。

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$ の計算。これも解き方はいくつかあります。ここでは一番スタンダードなものを紹介しましょう。$\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} = t$ とおいてみます。$x = \dfrac{1}{1+t^2}$ で $dx = \dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}dt$ ですから

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx &= \int \left(1+t^2\right)t\frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}dt \\
&= \int \frac{-2\left(t^2+1\right)+2}{t^2+1}dt \\
&= \int \left(-2+\frac{2}{t^2+1}\right)dt \\
&= -2t + 2\arctan t \\
&= -2\sqrt{\frac{1-x}{x}} + 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}
\end{aligned}$$

というように計算できますね。もちろん、他の方法で求めても OK です。

(3) さて問題はこれ。しかし皆さん結構よく出来ていましたね。素晴らしい！
$\displaystyle\int \frac{1}{x^3+1}dx$ をぱっと見てすぐ方法を思いついた人は鋭い。これは**高校の知識が大活躍**します。といっても私の時代と 4 年違うわけで、もしかすると少し違っているかもしれませんが … 。
まず前半のキーワードは**部分分数分解**。$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ なので、被積分関数を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

と分解出来ます。きちんと「x の恒等式で〜」という記述を入れてくださった方もいました（えらい！）。

この調子で計算していきます。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1} \right\} dx \\
&= \int \left\{ \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1} \right\} dx \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

まず最後から 2 番目の行の 2 項目、log の絶対値が消えていることに注意してください。$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ となるためです。
それから最後の行の最後の項、積分計算には arctan の公式を使います。ただし x の部分が少し変形していますから、係数を間違えないように慎重に計算しましょう。これで計算できましたね。

回を重ねるごとに難しくなってきましたが、皆さん一生懸命解いてくださっていますね。この調子で次回も期待しています！

それでは、次回も頑張ってください☆