課題についての補足資料 4　2008 年 11 月 6 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 九大祭をはさんで、次回は**中間試験**ですね。かげながら応援しております☆
- 中間試験の**試験予告／持込用紙**は先週配布致しました。まだ受け取っていない方はお申し出ください。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

少しボリュームがありましたが、皆さん頑張って解いてくださっておりました。一つひとつ解説していきましょう。

[1]　(1)　$\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ の計算。まず $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおいてみると、$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ で（簡単な計算・出来なかった方はチェックしてみてくださいね！）$dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ ですから

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx &= \int \frac{2t}{(t+1)(t^2+1)}dt = \int\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt \\
&= -\log|t+1|+\frac{1}{2}\log(t^2+1)+\arctan t \\
&= -\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+\frac{1}{2}\log\left(\tan^2\frac{x}{2}+1\right)+\frac{x}{2} \\
&= \frac{x}{2}-\log\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|-\log\left|\cos\frac{x}{2}\right| \\
&= \frac{x}{2}-\log\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}
$$

と計算できるはずです。三角関数を使った変数変換はもう慣れてきましたか？

(2)　では $I=\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}-1}dx$ ではどうでしょうか（後で分かりやすいように I とおきました）。変数変換の方法は一通りではないので、もしかすると以下の様な形にならなかったかもしれませんが、きちんと計算できていれば式変形によって同じ答えにたどり着くはずです。
それはさておき、第一段階は $e^{2x}=t$ とおきます。$dx=\dfrac{dt}{2t}$ ですから

$$
I=\int\sqrt{e^{2x}-1}dx=\int\frac{\sqrt{t-1}}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{t-1}}{t}dt
$$

となります。続いて第二段階、$\sqrt{t-1}=u$ と変換しましょう。$dt=2udu$ となり、後は

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int\frac{u}{u^2+1}2udu=\int\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du \\
&= u-\arctan u=\sqrt{t-1}-\arctan\sqrt{t-1} \\
&= \sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}
\end{aligned}
$$

となります（簡単のため積分定数 C は省略）。

(3)　**<u>定積分</u>** $\int_0^1 \log\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ を計算します。変数変換 $\sqrt{x}=t$ を行いますが、範囲は $0\le x\le 1$ に対して $0\le t\le 1$ で変わりません。$x=t^2$, $dx=2tdt$ ですから、部分積分を使って

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\left(1+\sqrt{x}\right)dx &= \int_0^1 \log(1+t)2tdt = \left[t^2\log(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt \\ &= \log 2 - \int_0^1 \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = \log 2 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log|t+1|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と計算できてしまいますね。高校の数学だけで十分解けてしまう問題でした。

[2]　問題は以下の通り：

> **整数** n **に対し** $I_n = I(n,-n)$ **とする。但し** $I(m,n) = \int (\sin x)^m (\cos x)^n dx$ **とおく。このとき** I_n **と** I_{n-2} **の間の漸化式を求め、**I_3 **を計算せよ。**

I のような形の積分を見てすぐ「部分積分が使えそうだな」と思うことができれば 7 割は OK です。あとは細かい議論や計算をクリアーできれば怖くないでしょう。
というわけで、部分積分をやってみましょう：

$$\begin{aligned}I_n = I(n,-n) &= \int (\sin x)^n (\cos x)^{-n} dx = \int (\sin x)^{n-1} \times (\sin x)(\cos x)^{-n} dx \\ &= \frac{1}{n-1}(\sin x)^{n-1}(\cos x)^{-(n-1)} - \int (\sin x)^{n-2}(\cos x)^{-(n-2)} dx\end{aligned}$$

となって、漸化式

$$I_n = \frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1} - I_{n-2}$$

が求まります。この漸化式を使って I_3 を求めるには $n=3$ を代入して

$$I_3 = \frac{1}{2}\tan^2 x - I_1$$

を計算しましょう。I_1 は高校数学を使って

$$I_1 = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x|$$

となるので、結局

$$I_3 = \frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x|$$

となり、これが答えです。上の計算自体はそんなに難しくはありませんが、漸化式を部分積分で解くという方法は非常に大事なテクニックですので、一度は自分で計算を追って復習しておいてくださいね。

ちょっと高級な補足

さて、最後の問題 [2] ですが、もう少し一般の場合を考えてみましょう。

問題 $I(m,n) = \int (\sin x)^m (\cos x)^n dx$ **(**m, n **は整数）とおく。与えられた** m, n **に対して** $I(m,n)$ **を計算するにはどうすれば良いか？**

少し（かなり？）難しくなりましたが、考え方は同じです。先程やったような三角関数の部分積分を使って、次の 4 つの漸化式が計算できます。余力のある方はチャレンジしてみてください。

- $I(m,n) = -\frac{1}{m+n}(\sin x)^{m-1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m-1}{m+n} I(m-2,n)\ (m+n \neq 0)$
- $I(m,n) = \frac{1}{m+n}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1} + \frac{n-1}{m+n} I(m,n-2)\ (m+n \neq 0)$
- $I(m,n) = \frac{1}{m+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I(m+2,n)\ (m \neq -1)$
- $I(m,n) = -\frac{1}{n+1}(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I(m,n+2)\ (n \neq -1)$

sin 側と cos 側の次数の上げ下げが、この 4 つの漸化式で出来ることが理解できれば OK です。
続いて初期条件ですが、任意の m, n に対して $I(m,n)$ を計算可能にするためには以下の値があれば良いでしょう（これも簡単な積分計算ですからやってみてくださいね)。

- $I(0,0) = x$
- $I(1,0) = -\cos x$
- $I(0,1) = \sin x$
- $I(1,1) = -\frac{1}{2}\cos 2x$
- $I(-1,0) = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$
- $I(0,-1) = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$
- $I(-1,-1) = \log|\tan x|$

これに加えて、宿題で使った関係式：

- $I(n,-n) = \int (\tan x)^n dx$

を使えば、すべての場合を計算できるようになるのです。

一般に、不定積分がいつでも知られている関数（有理関数、無理関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数 etc. とそれらの組み合わせ）で書けるとは限りません。というか、書けないのが普通です。例えば

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int \frac{\cos x}{x}dx, \quad \int \frac{e^{-x}}{x}dx, \quad \int e^{-x^2}dx$$

や、他にも

$$\int \sin(x^2)dx, \quad \int \cos(x^2)dx, \quad \int \frac{dx}{\log x}$$

などなど、一見知られている関数として求まりそうですが、いずれも「新しい」関数となっています。それから

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

など、平方根の中に（重解のない）3 次式または 4 次式の入っている無理関数の不定積分は「新しい」関数となります。この不定積分は **楕円関数**[1](elliptic function) と呼ばれており、非常に面白い性質を持っていることから深く研究されています。

＊＊＊＊＊

重要 課題 5（本日提出分）の返却について

本日提出して頂いた**課題 5** は添削し、**来週以降 全学教育の窓口（教務・本館 1F）にて返却** します。必要な方は答案と配布資料をお受け取りください。
※ 学内便の発送の都合により少々遅れる可能性があります。

さいごに：基本的な積分公式などは覚えてしまうのが後々良いとは思いますが、自信のないものは持込用紙を活用してカバーしてください（持込用紙に書き込んでいるうちに覚えてしまう、という話もよく聞きます）。計算ミスなどを防ぐには、問題演習をたくさん積む（＝手を動かしてみる）ことが全てですから、自信がないという方は出来る範囲で練習しておいてくださいね。
中間試験は学祭の翌週です。学祭で体力を使い果たすときついので、お気を付けを。

それでは、中間試験も頑張ってください☆

[1] よく知られている「楕円」とはちょっと違うものです。