課題についての補足資料 5　2008 年 11 月 13 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 今回の課題までが中間試験の範囲となります。九大祭前後は大変かもしれませんが、復習はしっかりお願い致しますね☆

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

中間前最後の課題は**広義積分**と定積分の応用問題でした。広義積分はふつうの積分に「極限操作」というひと手間を加えたものですが、あまり構える必要はありません。素直に計算していけばきちんと解くことができます。

[1]　(1)　$\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}dx$ の計算。積分自体は**公式そのもの**ですよね !! まずは極限の形

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dx}{1+x^2}dx$$

になおして、その中の定積分をふつうに計算します。

$$\int_0^N \frac{dx}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^N = \arctan N - \arctan 0 = \arctan N$$

あとは $N\to\infty$ とすれば $\arctan N \to \dfrac{\pi}{2}$ ですから、結局 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$ と求まります。

(2)　$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ は特別な例で

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[2\sqrt{x}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left(2\sqrt{N}-2\right) \\ &= \infty\end{aligned}$$

となります。この場合は発散してしまいました。

(3)　$\displaystyle\int_0^1 \log x dx$ は 0 に近づける時がまずいので、以下のようになります。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x dx &= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \log x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{[x\log x]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right\} \\ &= \lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon\log\varepsilon - 1 + \varepsilon) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\log\varepsilon}{1/\varepsilon} - 1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} \\ &= -1\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ はもう少し手間がかかりますが、ここがふんばりどころですね。まずは

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1-0}\int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

と書いたら $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = t$ と変数変換してみましょう。このとき変数の区間は

$$[0,\varepsilon] \to \left[0, \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right]$$

と動きますから、定積分の積分範囲が変化します。さらに $x = 1 - \dfrac{1}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ ゆえ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx &= 2\lim_{\varepsilon\to 1-0}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}\left\{\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}\right\}dt \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 1-0}\left\{[\arctan t]_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} - \left[\frac{t}{2(t^2+1)}\right]_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}\frac{dt}{t^2+1}\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1-0}\left\{\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

と計算されます。ここで上から 2 行目の部分には**課題 2-[2]** で皆さんに示して頂いた式

$$I_{m+1} = \frac{x-a}{2mb^2\{(x-a)^2+b^2\}^m} + \frac{2m-1}{2mb^2}I_m$$

を使っています（但し $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}$ とする）。これまで扱ってきた公式や変数変換の方法などを組み合わせて解くことが出来れば、ほとんどの積分計算は大丈夫でしょう。

[2] $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ の計算ですが、これも応用問題ということで前に勉強したことを使います。今回は教科書 p95 の解法にならって解きます。とりあえず $x = \sin t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおいてみると、$1-x^2 = \cos^2 t$ で $dx = \cos t dt$ となります。ここで、前回の**課題 4-[2]** を思い出してみましょう。2 枚目の「ちょっと高級な補足」にも書きましたが、同じく教科書 p93 に載っている漸化式：

$$I(m,n) = \frac{(\sin x)^{m+1}(\cos x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)$$

をうまく使うことがポイントです（但し $m+n \ne 0$）。これにより

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x^2)^n dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n+1}dt = [I(0,2n+1)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}\times[I(0,1)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}\times[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\ldots\times\frac{2}{3}\times 1 \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

と計算できますね。まず、漸化式を使って $I(m,n)$ の n の値を減らして簡単な積分計算に帰着させます：

$$\begin{aligned}[I(0,2n+1)]_0^{\frac{\pi}{2}} &= \left[\frac{\sin x(\cos x)^{2n}}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} I(0,2n-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\left[I(0,2n-1)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

これを繰り返していくと、一回ずつ係数が出てきて、最終的に $I(0,1)$ まで落とすことができます。それから、最後の答えの形は一つ上の式に

$$\frac{2n}{2n}, \frac{2n-2}{2n-2}, \frac{2n-4}{2n-4}, \ldots$$

とかけていき、分母と分子をそれぞれきれいにまとめることで出てきます。このテクニックは講義でも出てきた（はずの）**Wallis の公式：**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$$

の証明にも使われており、割とよく使うテクニックです。

チェックポイント

- 一通り勉強してきた初等関数の不定積分・定積分は、しっかり計算練習をして間違えないように訓練しておいてください。特に合成関数の場合は係数や符号のミスが非常に目立つので、落ち着いて解くようにしましょう。また、大学で初めて目にした関数（例えば $\arctan x$ など）は要チェックです。
- **広義積分**は手順を勝手にショートカットしないで（たとえば直接 ∞ を代入する・lim の形にせず積分を計算していく etc.)、講義で習った通りに解きましょう。
- 漸化式の扱いにも慣れておいてください。文字になったとたんに混乱してしまいがちですが、漸化式では文字を付け間違うと全て台無しになってしまうので、気をつけましょう。
- 以上を含め自信のない所は、持込用紙などを活用してカバーしてください。健闘を祈ります！

それでは、中間試験も頑張ってください☆