課題についての補足資料 6　2008 年 12 月 11 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

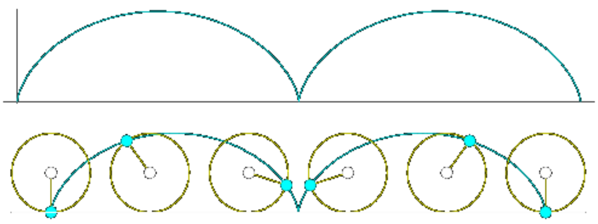
- 課題プリントの番号が「課題 5」になっていたようです。正しくは「課題 6」です。
- **救済レポート**を提出される方は本日が締切です。以後は受け付けません。
  - 再度確認。このレポートの提出は任意です（強制ではありません）。また、30 点以上の方の提出も歓迎致します。この場合、中間試験の得点は変わりませんが、最終的な成績を決める際の判断材料として考慮致します。
  - **誰かと一緒に勉強した、教えてもらった、お世話になったという場合は、レポート 1 枚目の右上にその方の名前を書いて提出すること。**協力してくれた人へのマナーだと思ってください。勿論、これがレポートの成績に影響することはありません。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

曲線を扱った、定積分の応用問題でした。高校の理系数学でやったという人もいたのでは？（ちなみに私はやった記憶があります）皆さんよくできていました♪

[1]　**(1)**　サイクロイド（cycloid）曲線の全長を求める問題。公式一発で片付いてしまいます。



from Wolfram MathWorld ／ http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html

オンラインフリー百科事典「Wikipedia」などで「サイクロイド」と検索すると、サイクロイド曲線の出来方を動画で見ることができます。
$dx = a(1-\cos\theta)d\theta,\ dy = a\sin\theta d\theta$ なので

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = a\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

よって求める長さは $l = \displaystyle\int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta = 8a$ となります。

(2),(3)　続いてこれを x 軸の周りに回転させてみましょう。ラグビーボールのような立体が出来ましたね。曲線自体が簡単な形をしているので想像しやすいかと思います。
この問題の解説は皆さんのテキスト p118-p119 に詳しく載っている[1]ので、公式をしっかり確認してじっくり計算を追ってみれば大丈夫でしょう。

[1]No.2 に少し補足を付けました。良ければご参照ください。

答えだけ書けば、表面積は

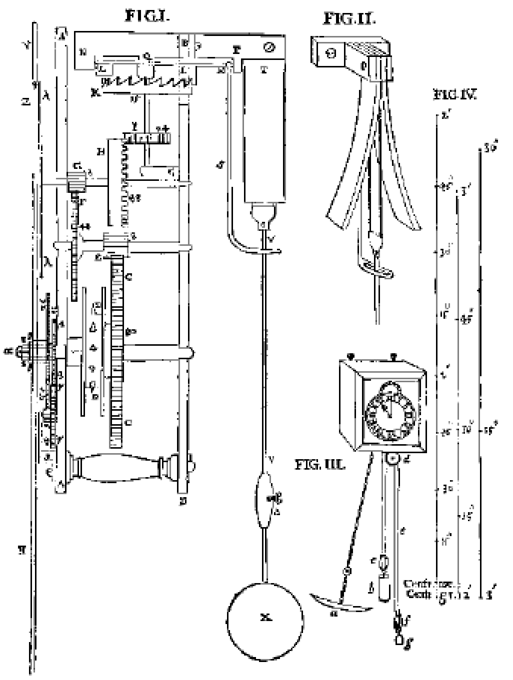
$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{1+\left(\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right)^2}\frac{dx}{d\theta}d\theta = 2\pi \int_0^{2\pi} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta \\ &= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^{\frac{3}{2}}\theta = \frac{64}{3}\pi a^2 \end{aligned}$$

で、体積は

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta}d\theta = \pi a^3 \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3 d\theta = 5\pi^2 a^3$$

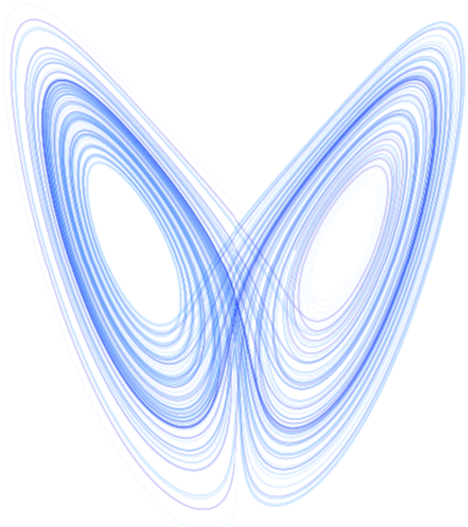
となっています。途中省略している計算が三角関数の定積分になっていますが、中間試験でたくさん勉強しましたね！

さて、あっさり終わってしまったのでちょっと補足。この「サイクロイド」曲線は色々な所に応用されています。面白い例を紹介しましょう。



上は**ホイヘンスのサイクロイド時計**（C.Huygens, 1629-1695）と呼ばれるもので、1673 年に作られたものとされています。いわゆる「振り子」とサイクロイド曲線には非常に密接な関係があり「振り子の振幅に関係なく一定周期で触れる」状態を実現する性質をうまく利用した時計です。少々見づらいかもしれませんが、上の図中「Figure.2」の部分にサイクロイド曲線が応用されています。もっと詳しいことを知りたい人は適当な物理学の本（数学書よりも見つかりやすいと思います）を手にとってみてくださいね。

それから、一言に曲線といっても本当に星の数ほどの種類があります。授業でも出てきた「心臓形（cardioid）」や「星芒形（asteroid）」、「連珠形（lemniscate）」などは知っていた人も多いかもしれませんが、例えば極端な例では次のようなものもあります。



上は**ローレンツ・アトラクター**（Lorenz attractor）と呼ばれるモデルで、気象学者のエドワード・N・ローレンツ（Edward N. Lorenz）にちなんで名づけられたものです。3 次元空間の図ですが、とても神秘的な形をしていませんか？

論文「Deterministic Nonperiodic Flow」から「カオス理論」という研究まで発展したこの曲線ですが、「北京で蝶が羽ばたくと、ニューヨークで嵐が起こる」という有名な「バタフライ・エフェクト」もここから来ています。上の図が蝶の形にそっくりということもこの言葉の所以です。

だいぶ補足が長くなってしまいましたが、新しいことを勉強したときはいろんな視点から眺めて楽しむというのも良い勉強法だと思うので、是非いろいろ探してみてくださいね！

それでは、よいお年をお迎えください☆

追記：教科書の解答例についての補足　いくつか間違いや質問のあったポイントを挙げておきます。

- p118 下の「解」上から 2 行目の左から右への変形で $-3\cos\theta$ が消えていますが、これは 0 から 2π まで積分すれば 0 となるためです。同じことが (2),(3) 共通で他に数ヶ所使われています。
- 同じく p118、3 行目右から 4 行目左へは変形の公式：

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

  を使います。高校で勉強しましたね！
- **半角の公式**がよく使われています。$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$ です。
- 人によっては **3 倍角の公式**を使ったかもしれません。以下の公式です。
  - $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
  - $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

  essential に使うのは cos の場合だけでしょう。上を変形してうまく計算してください。