# 課題についての補足資料 7-2　<u>中間救済レポート</u>

**TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）**

## コメント

- 本日救済レポートを返却しました。右上の点数をあなたの中間試験の得点（100 点満点）に加算して 2 で割り四捨五入した値と 30 とで **<u>小さい方</u> が最終の中間試験の得点**となります。
- 30 点以上で提出された方は、このレポートの出来を最終成績の判定材料として使用致します。

## 解説

**<u>レポート問題</u> [1]**　次のような**問題**に対するある人の**解答**：

**問題**　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ を計算せよ。

**解答**　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$

上の解答は**誤りである。**どこが間違っているのかを簡潔に説明した上で、正しい解答を付けよ。

$(1/x^2)>0$ だから積分値が負になるのはおかしいという間違い探し問題でしたが、これは簡単。被積分関数 $1/x^2$ は $x\to 0$ で $+\infty$ に発散しているため、$x=0$ **で定義されないにも関わらず、積分範囲** $[-1,1]$ **は** $0$ **を含んでいることが誤り**[1]です。つまり**広義積分**として考える必要があります。正しい計算は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx &= \lim_{\varepsilon\to -0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1}{x^2}dx+\lim_{\delta\to +0}\int_{\delta}^{1}\frac{1}{x^2}dx\\ &= \lim_{\varepsilon\to -0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{\varepsilon}+\lim_{\delta\to +0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\delta}^{1}\\ &= \lim_{\varepsilon\to -0}\left\{-\frac{1}{\varepsilon}-1\right\}+\lim_{\delta\to +0}\left\{-1+\frac{1}{\delta}\right\}\\ &= \infty\end{aligned}$$

となり（正の）無限大に発散します。積分値を求める時には原始関数の両端の値が分かれば良いので、意外と見落としてしまいがちです。ご注意ください。

それでは次のような場合はどうでしょうか？（裏面に続く）

[1]正確には、微分積分の基本定理の仮定にある「被積分関数が積分範囲で連続」を満足していないということが間違いの原因です。一般に Riemann 積分をきちんと定義するためには、上限和／下限和と上極限／下極限、さらに Darboux（ダルブー）の定理をかますという多くの手順を踏まなければならないのですが、微分積分の基本定理が仮定しているのは**被積分関数の連続性 <u>だけ</u>** というのはちょっと凄いこと。ということは、逆にこの仮定がきちんと満たされているかは常に用心してチェックしなければならない、ということですね。

**類題**　次のような**問題**に対するある人の**解答**：

**問題**　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2}{4x^2+(x-1)^2}dx$ を計算せよ。

**解答**　$\displaystyle\frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{4x^2+(x-1)^2}$ を使う。

この関数 $\displaystyle\frac{2}{4x^2+(x-1)^2}$ は区間 $[-1,1]$ において 連続であるから

$$\int_{-1}^{1}\frac{2}{4x^2+(x-1)^2}dx=\left[\arctan\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\right]_{-1}^{1}=\arctan 0-\arctan 1=0-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$$

上の解答は**誤りである。**どこが間違っているのかを簡潔に説明した上で、正しい解答を付けよ。

上も被積分関数が常に正の値をとるにも関わらず積分値が負になってしまっています。しかし上の下線部にある通り、被積分関数はきちんと積分区間で連続なので、広義積分を考える必要はなさそうです。今度は何がおかしいのでしょうか ??
ぜひ考えてみてください。出来た方や質問などがあれば提出してくださいね。

**レポート問題 [2]**　不定積分 $\displaystyle\int x^n\log x dx$ （$n$ は整数）を計算せよ。

**ひっかけ問題。素直に部分積分を計算して**

$$\begin{aligned}\int x^n\log x dx &= \int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'\log x dx\\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\int\frac{1}{n+1}x^n dx\\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\log x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

**で 終わってはいけません !!** 求まった関数は $n=-1$ で定義できませんから、$n$ についての場合分けが必要になります[2]。上は $n\neq -1$ の場合、そして $n=-1$ の場合は個別に

$$\int\frac{\log x}{x}dx=\int(\log x)\cdot(\log x)'dx=\frac{1}{2}(\log x)^2$$

と計算してあげましょう。もしかすると「$n$ は自然数」と読み違えた人もいるかもしれません。問題文をよく読みましょう。

[2] 大学入試問題などではこういう問題はよく見受けられます。当時の勘がはたらいた人は解けたのでは？

**レポート問題 [3]**　以下の $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{6}$ を埋めよ。**求めた手順（途中経過）も示せ。**

不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^2}dx$ を計算してみよう。まず $x^4+1$ を $x(x-1)^2$ で割ると、商は $\boxed{1}$ で余りは $\boxed{2}$ なので

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^2} = \boxed{1} + \frac{\boxed{2}}{x(x-1)^2}$$

と書ける。ここで更に

$$\frac{\boxed{2}}{x(x-1)^2} = \frac{\boxed{3}}{x} + \frac{\boxed{4}}{x-1} + \frac{\boxed{5}}{(x-1)^2}$$

と部分分数分解できるから、結局

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^2}dx &= \int\left\{\boxed{1} + \frac{\boxed{3}}{x} + \frac{\boxed{4}}{x-1} + \frac{\boxed{5}}{(x-1)^2}\right\}dx \\ &= \boxed{6} + C\end{aligned}$$

と計算できる（但し $C$ は積分定数）。

誘導が付いていますから、素直に従って解きます。

- まず $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ は普通に割り算。展開し筆算して求めましょう。商は $x+2$ で余りは $3x^2-2x+1$ と求まります。というわけで

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^2} = x+2+\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2}$$

と書けました。

- 続いて部分分数分解を行います（$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$）。形は分かっているので取り敢えず

$$\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

と置いて両辺を通分、$x$ の恒等式であることを述べて係数を比較すればおしまい。答えは

$$\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

と求まるでしょう。

- この 2 つをまとめて

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^2} = x+2+\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

となったので、あとは素直に積分すれば $\boxed{6}$ は

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+1}{x(x-1)^2}dx &= \int (x+2)dx + \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \log|x| + 2\log|x-1| - \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{x^2}{2} + 2x + \log\left|x(x-1)^2\right| - \frac{2}{x-1}\end{aligned}$$

となります。

**レポート問題 [4]**　以下の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ を埋めよ。**求めた手順（途中経過）も示せ。**

不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ を以下の手順に従って計算しよう。

- まず $x = \dfrac{1}{\sin t}$ とおいて $I$ を $t$ に関する積分に変形すると $I = \boxed{1}$ となる。
- 次に $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とおけば、$\dfrac{du}{dt}$ は $u$ を用いて $\dfrac{du}{dt} = \boxed{2}$ と書ける。
- ここで $\sin t = \sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とみなせば、$\sin t$ を $u$ を用いて $\sin t = \boxed{3}$ と表すことができる。
- 以上より、求める不定積分は $I = \boxed{4}$ である。

こちらも誘導問題。[3] よりは少しレベルアップしています。

- $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$ であり $x^2 - 1 = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 1 = \dfrac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} = \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}$ なので $\boxed{1}$ は

$$I = \int \frac{\sin t}{\cos t}\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) dt = -\int \frac{1}{\sin t} dt$$

　です。とりあえず不定積分ですので $\dfrac{\sin t}{\cos t} > 0$ は仮定してよいでしょう。

- 続いて $\boxed{2}$ は単なる計算。

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\left\{1+\tan^2\frac{t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)$$

- $\boxed{3}$ は誘導にあるヒントを頼りに

$$\begin{aligned}\sin t &= \sin 2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}} \\ &= \frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}\end{aligned}$$

　と計算できます。

- というわけで、片づけてしまいましょう。$x = \dfrac{1}{\sin t}$ より $\sin t = \dfrac{1}{x}$, よって $t = \arcsin\dfrac{1}{x}$ となるので $\boxed{4}$ は

$$\begin{aligned}I &= -\int \frac{1}{\sin t}dt = -\int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}du \\ &= -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| \\ &= -\log\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x}\right)\right|\end{aligned}$$

　と求まります。ちょっと煩雑ですが、きちんと $x$ の式になるまで戻しましょう。

**レポート問題 [5]**　$I_n = \int_0^1 (\arcsin x)^n dx$ とおく。これは漸化式

$$I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$$

をみたす事を示せ。また $I_2$ の値を求めよ。

中間試験でも出題された漸化式の発展問題ですが、ほとんど計算だけで片付く問題でした。まずヒントで与えられていた形を出しますが、これは $t = \arcsin x$ とおくと $dx = \cos t dt$ なので

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t dt$$

で得られますね（積分範囲に注意）。そこでこれをひたすら式変形していきます。

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n (\sin t)' dt = [t^n \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n t^{n-1} \sin t dt \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \sin t dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} (-\cos t)' dt \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n + n \left[t^{n-1} \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) t^{n-2} \cos t dt \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1) I_{n-2}
\end{aligned}$$

これで求めたい漸化式になりました。あとはこれに $n = 2$ を代入して

$$I_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2I_0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2$$

でおしまいです。

**レポート問題 [6]**　区間 $[0, 2\pi]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$$

で定まる級数を $f(x)$ の **Fourier 級数**といい

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と書く。今、$f(x) = \dfrac{\pi - x}{|\pi - x|}$ に対し、その Fourier 級数は

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

と表されることを示せ。すなわち

- **すべての** $n$ **に対して** $a_n = 0$
- $n$ **が偶数のとき** $b_n = 0$**,** $n$ **が奇数のとき** $b_n = \dfrac{4}{\pi n}$

であることを示せ。

6 問のラストを飾るのは、聞き慣れない（？）言葉が並ぶちょっと変わった問題。もしかすると尻込みしてしまったかもしれませんが、**よく読んでみるととっても簡単な問題**でした。ヒントにも書きましたが、単に定積分の計算をするだけです。まず $a_n$ は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

で、一方 $b_n$ は

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n} \end{aligned}$$

ですから、$n$ が偶数のときは 0、$n$ が奇数のときは $\dfrac{4}{\pi n}$ となりますね。

## 講評

- 救済レポート提出者は **23 名（正規の対象者 7 名を含む）** でした。思っていたよりも多くの方が提出してくださったようで何よりです。

  一部を除いて all or nothing で採点しましたが、最高点は **22 点**（2 名）とよく出来ていました。以下詳細：
- **問題 [1]：** 問題文中「理由を簡潔に説明せよ」とあるので、計算式だけの答案は 2 点減点。$x = 0$ における極限操作ミスが少し目立ちましたが、これはちょっとまずいのでしっかり見直しておいてください。それから広義積分は被積分関数が定義出来ないポイントで使うもので、むやみに積分範囲を文字で置けば良いというものではありません。これも 2 点減点。
- **問題 [2]：** $n = -1$ のケースが無ければ不正解。
- **問題 [3]：** 採点していて思ったのですが、**皆さんちゃんと自分で計算してみましたか ??**

  部分分数展開の（$\boxed{2}$ での）全く同じ符号ミスが半数以上。ところがその後（$\boxed{3}$〜$\boxed{5}$）は何故か計算が合っているというのはどう考えても不自然です。恐らく誰か 1 人の答案を写して**共倒れ**したのでは ??

  ちなみに最後の log の真数部分には絶対値が必要です。これを忘れた方は 2 点減点。それ以外は点を与えていません。
- **問題 [4]：** 積分計算を先に解いてその後誘導の部分を下に書いた答案がこれまた多数。どれが答えなのか分からないので 2 点減点しました。せめて「$\boxed{2}$ はこれ」という意味で式の下に下線で示すくらいの配慮はしてください。

  それからこの資料で示した答え以外に $-\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right|$ も正解です。惜しい答えもいくつかありましたが、微分しても合わないものは間違い。そんな中答えに $\pm$ を含むものがありましたが**これは論外 !!**（これは関数ではないので）また、答えは合っているが誘導に全く従わない答案には点を与えていません。
- **問題 [5]：** $I_2$ の値を求め忘れていた方がちらほら。不完全解答は得点なし。
- **問題 [6]：** Fourier 級数でビビったのか一番解答者が少なかった問題。ですが正答率は一番高かったですね（実は簡単！）。

採点にミスがある等のクレイムのある方は、講義最終回（1 月 22 日）終了時までにお申し出ください。TA（横山）はこの日の終わり頃に皆さんの試験持込用紙を渡しに参りますから、直接私の所に来てくださっても結構です。