課題についての補足資料 7-1　2008 年 12 月 18 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- あけましておめでとうございます☆ あと 1ヶ月ほどですが、今年もよろしくお願いいたします！
- 次回の講義終了時に**定期試験用持込用紙**を配付する都合上、本日の課題（課題 8）未提出の方は **2 点減点で確定**とさせていただきます。

  忘れたという方は次回提出してください。提出の有無は最終成績の判断材料とします。

内容について

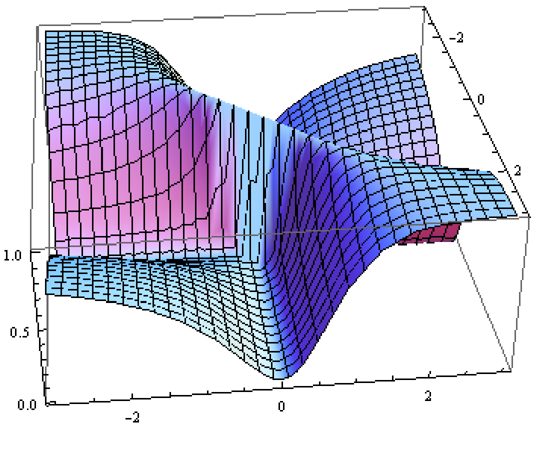
皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

今回も基本的な問題が続きます。偏微分は大学で初めて出会う内容ですが、やり方は 1 変数の場合とそんなに変わりません。落ち着いて考えれば大丈夫です。

[**1**]　次のような 2 変数関数を考えます：

- 原点以外では $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$
- 原点での値は 0、即ち $f(0,0) = 0$

これをグラフ[1]にしてみましょう。 頑張れば手計算でもいける !?



中心付近に**断崖絶壁**が見えますね。このようなポイントを数学では**特異点**（singularity）と呼びます。中心に辿り着くためには山の頂上からと谷底からの 2 通りの行き方が考えられますが、それぞれの近づく場所（行先）は頂上と底で全く違ってしまっています。つまり、**近づけ方によって極限値が変わってしまう**のです。

[1] Powered by Wolfram Mathematica ver.6.0.3

注意：表のページのグラフは平面が全てつながっていますが、これは計算機でグラフィックスを出している都合上そうなっているだけで、実は原点の部分ではつながっていません。つまり谷の一番底から一気に頂上に向かって進むことは実際はできません（実際 $y = 0$ で固定して $x \to 0$ とすると 0 になり、山の頂上（高さ 1）に行けない）。山のぼりを例にとったのは単にわかりやすく説明したかったためです。

それでは実際に確かめてみましょう。最初の 2 つは簡単で、慎重に計算すれば

- $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$
- $\displaystyle \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

となり、どちらも 0 になります。ここで「じゃあ極限値は 0 で原点で連続だ！」と**勘違い**しないように注意！ **ななめ 45 度**[2]から近づけてみるとどうなるでしょうか？$x = y \neq 0$ で固定してしまうと

$$f(x,x) = \frac{x^2\cdot x^2}{x^2\cdot x^2+(x-x)^2} = \frac{x^4}{x^4+0} = 1$$

となり、なんと値が 1 の**定数関数**になってしまいます !! これを原点に近づけるのですから、もちろん極限値は 1 となって、$f(x,y)$ の定義からこれは原点において **不連続** であることがわかるのです。先ほどのグラフで頂上から出発して中心に行けば、高い所のまま移動することになりますが、これがこの「ななめ 45 度」の場合に対応しているのです。不思議ですね！

[2]　続いて偏微分 ×2。これは講義で習った通りに素直に計算すれば OK。

(1)　これは簡単。$f_x(x,y) = 3y^4 - 4xy^3,\ f_y(x,y) = 12xy^3 - 6x^2y^2$ でおしまい。

注意：記号はいくつか種類がありますので、お好きなものをお使い頂いて結構です。例えば上の f_x,f_y のほかに $\partial f/\partial x$,$\partial f/\partial y$ など。但し df/dx,df/dy は**ダメ**です。偏微分記号とこれまでの微分記号（∂ と d）は**全く意味が違います。**例えば 3 変数の「微分」は

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

という意味で使いますので、混乱を招かないようきちんと区別しないといけません。

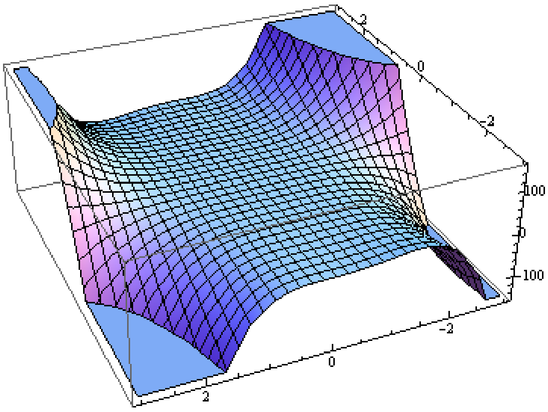
(2)　$f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$ も分数の微分を慎重に行うのみ。arcsin の微分公式を思い出して

- $\displaystyle f_x(x,y) = \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = \frac{|y|}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$
- $\displaystyle f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = -\frac{|y|}{y}\cdot\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$

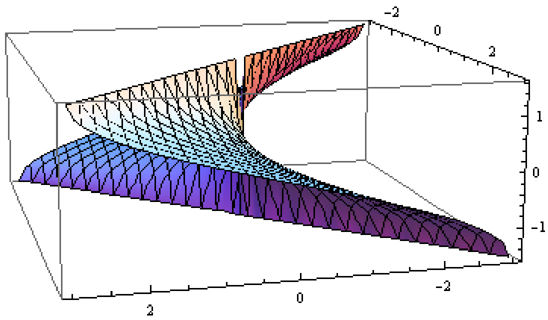
となります（絶対値が出ない形も OK）。微妙に違う式が出てきましたね。

調子にのって、この 2 つの関数もグラフにしてみました（No.2 へ続く）。

[2]正確には $y = x$ のグラフに沿って近づけるという意味です。質問の欄に $y = mx$ **のグラフを考えるのは何故？**という意見が多数ありましたが、これは m を変えれば原点への近づけ方が変わり、極限値が m の関数になればこれは不連続である（m を変えれば極限値も変わるので）、という議論をしたかったからです。



隅の方が領域外で切れてしまっていますが、(1) は中心付近はゆるやか、少し広がると急激に増加／減少していく様子が観察できますね。



一方 (2) はスパイラル構造を持っています。中心付近はこれまた特異点で、グラフも変わったふるまいを見せてくれます。

このように、変数が 1 つ増えただけでその関数の挙動を調べたりグラフを描いたりすることはとても難しくなっていきます。ですが、基本は 1 変数の微分がしっかり使われていますので、自分なりにしっかり整理して問題演習に取り組んでみてくださいね。

それでは、次回もがんばってください☆

※ 救済レポートについては No.3 以降をご覧ください