課題についての補足資料 8　2009 年 1 月 8 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

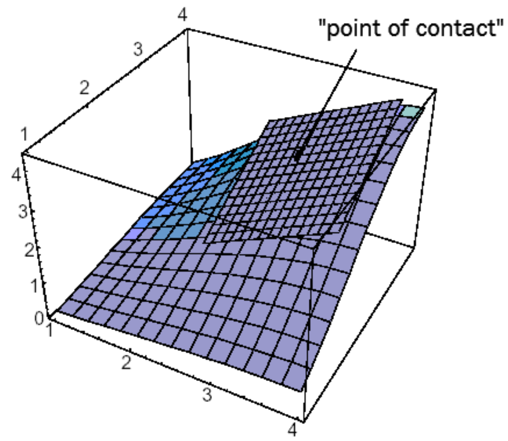
コメント

- 本日の最後に**定期試験用持込用紙**を配付します。
  - 持込用紙上部には皆さんの**定期試験を除く成績**が記載されています。数字の読み方についての説明文をよく読んで、記載内容に間違いが無いかどうかご確認ください。
  - 記載内容に誤りを発見した場合は、**2 月 5 日（木）の定期試験の日に、該当する課題 or 中間試験の答案をお持ちください。**確認の上訂正させて頂きます。
- 本日提出して頂いた課題（課題 9）は、中間試験救済レポートと共に、最終成績が GPA 評定の境界にある場合の判断材料として使用します。平常点への影響はありません。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

全微分と**偏微分**、この 2 つはよく似ていますが大きな違いがあります。計算は出来てもそれがどういう意味かを知らないとピンと来ないかもしれません。少し詳しく解説しましょう。



from Theater of Economics ／ http://econ.atnifty.com/

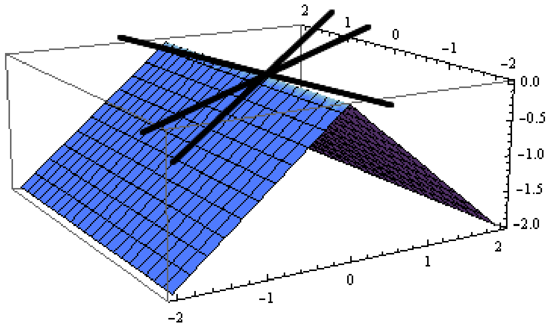
まず上のような緩急のある地面を想像してみましょう。このある一点に注目し（上図「point of contact（接点）」のこと）、ここで地面が「どのように」傾いているかを調べてみましょう。そこで微分を使いたいので、とりあえず「東西方向」「南北方向」「上下方向（垂直方向）」をそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸とします。
ここで**「この点に接し、かつ上から見下ろすと東西方向を向くように（南北方向には向けずに）」まっすぐな棒をあててみましょう**[1]**。**すると、この時の棒の傾きが $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ となります。

[1]もしかすると棒が地面にめりこんでしまうかもしれませんが、あくまでも例えなので気にしなくでよいです。

先の「南北方向には向けずに」という部分は **「y を定数だと思って x で偏微分する」** ことに相当しています。同様に「東西方向には向けない」場合が $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ となりますね。ということで

「偏微分可能」＝「その点に（制限つきで）棒がうまくあてられること」

という感じで理解できます。棒がうまくあてられるというのは「ぴたっと傾きが決まる」という意味で、例えば 2 変数関数 $z = f(x, y) = -|x|$ では y 軸上で x 軸方向に棒がうまくあてられず、x で偏微分出来ないことがわかるでしょう[2]。



「偏微分不可能」＝「棒のあて方もいろいろ」

一方、偏微分可能な場合でも上のような「南北方向へ向けない」といった制限を外してみると棒のあて方は無数にありますが、**実はこれらはある一つの平面上にあります。** これはいわゆる「接平面[3]」と呼ばれるもので、通常ただ 1 つ定まります。これを**全微分**と呼ぶのです。

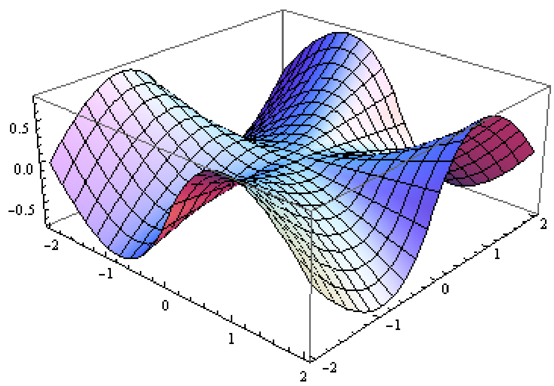
「全微分可能」＝「その点に板がうまくあてられる（ぴったり固定できる）こと」

先の「偏微分不可能」の例を見ると、やはり y 軸上の点では板を乗せてもふらふらしていて固定できない（＝全微分不可能である）ことがわかるでしょう。また、これらから

f が点 p で全微分可能ならば、f は点 p で偏微分可能である

ことも分かりますね（cf. p161:定理 10）。

[1]　ということで前フリが長くなりましたが、今回の問題。



2 変数関数 $f(x, y) = x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}$ のグラフ

---

[2] y では偏微分可能であることに注意。
[3] 1 次元の場合がおなじみの「接線」です。

図を見る限りでは原点で尖っていたりするわけでもなく、水平に板を乗せることができそうですが、実際これは原点で全微分可能になっています。少し難しいですが、これを示してみましょう。

まず、使うのはテキスト p.160 の中ほどにある

> **$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された関数 $z = f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ で 全微分可能 であるとは、1 組の実数 A, B が存在して**
> $$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \rho\varepsilon(h,k) \qquad (\rho = \sqrt{h^2+k^2})$$
> **によって定まる $\varepsilon(h,k)$ が $\varepsilon(h,k) \to 0$（$\rho \to 0$）をみたすときにいう**

の部分で、これにならって計算していきます。まず 2 変数関数 ε を

- $h = 0$ または $k = 0$ のとき　$\varepsilon(h,k) = 0$
- それ以外では　$\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k)}{\rho}$

で定義します。この 2 番目の条件の時では $\varepsilon(h,k) = \dfrac{h^2}{\rho}\arctan\dfrac{k}{h} - \dfrac{k^2}{\rho}\arctan\dfrac{h}{k}$ と書けることに注意して、ε を評価すると

$$\begin{aligned} |\varepsilon(h,k)| &\leq |h| \cdot \frac{|h|}{\rho} \cdot \left|\arctan\frac{k}{h}\right| + |k| \cdot \frac{|k|}{\rho} \cdot \left|\arctan\frac{h}{k}\right| \\ &\leq \frac{\pi}{2}(|h| + |k|) \end{aligned}$$

となります[4]。また、この評価（不等式）は 1 番目の条件（$h = 0$ または $k = 0$ のとき）でも成りたつことに注意しましょう。というわけで、$\rho \to 0$ とすると $\dfrac{\pi}{2}(|h|+|k|) \to 0$ となりますから、$\varepsilon(h,k) \to 0$ がわかります。ここで関数 ε の定め方から

$$f(h,k) - f(0,0) = 0 \cdot h + 0 \cdot k + \rho\varepsilon(h,k)$$

と書けている（$A = B = 0$ がとれる）ことから、f が原点において全微分可能であることが示せました[5]。

または p.163 の定理 11 を使っても示せます。この場合は $f(x,y)$ が C^1-級であることを示せば良いので、f_x, f_y を計算し（偏微分可能性をいう）、この 2 つが原点を含めて連続であることをチェックすれば OK です。ただし上の方法に比べてちょっと面倒かもしれませんね $\cdots$ 。ちなみにこれで解いていた人が 10 数人いましたが、ほぼ正解に近い答案は 1 つか 2 つ、また偏導関数の連続性を忘れている惜しい答案もいくつかありました。

上の解説を読んでもすんなりと理解出来ないかもしれません。確かに「全微分可能である」ことを示すのは「全微分可能でない」ことを示すよりも格段に難しい[6]ので無理もないですが、習った定理を使えるようになるスキルはとても重要です。一度は苦しんでみて、少しでも感覚をつかんでもらいたいと思います。

[4] 1 行目から 2 行目へは $|\arctan x| \leq \pi/2$ の他に $|h|/\rho \leq 1$, $|k|/\rho \leq 1$ も使っています。この 2 つの不等式は演習問題としておきますので、自信のない方はチェックしてみましょう。

[5] これで証明がきちんと出来ていることは理解できますか ?? (これも演習問題)

[6] 一般的に「〜でない」ことを示すのは、反例を 1 つでも挙げられればそれでおしまいなので簡単。一方「〜である」ことを示すのは考えうるすべての場合を考慮しなければならず、設定を誤るといつまでも証明できないので労力が必要です。

[2]　ところ変わってこちらは**素直に計算するのみ。**とても簡単です。

(1)　ふつうの微分（or 全微分）記号と偏微分記号をきちんと区別して書ければ OK。

$$
\begin{aligned}
d(yz+zx+xy) &= \frac{\partial(yz+zx+xy)}{\partial x}dx+\frac{\partial(yz+zx+xy)}{\partial y}dy+\frac{\partial(yz+zx+xy)}{\partial z}dz \\
&= (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz
\end{aligned}
$$

(2)　こちらも (1) と同様。

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}
$$

を使って

$$
d\arctan\frac{y}{x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)dy=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}
$$

となりました。

＊＊＊

課題 9（本日提出分）の返却について

本日皆さんに提出して頂いた課題（課題 9）は採点後、配布資料と共に**全学事務窓口（本館 1F）**にて返却致します。今のところ **1 月 29 日（木）以降**ならば確実ですが、採点が早く終われば早まるかもしれません。
陰関数定理や極値問題などは非常に重要な内容ですので、定期試験でも出題される可能性が高いと思われます。必ず受け取って復習をしておいてくださいね。

それでは、定期試験に向けてがんばってください☆