課題についての補足資料 ファイナル　2009 年 1 月 22 日提出分

TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程 1 年）

コメント

- 1 年間にわたり（21CP の一部の方／再履の方は半期間）TA のコメントにお付き合い下さった皆様、本当にありがとうございました。これからも充実した大学生ライフを送られます事を願っております☆
- 定期試験用持込用紙に記載ミスがある方、課題 9 再提出の方は何れも**定期試験当日（2 月 5 日）に該当する答案をお持ちください。**
- この六本松キャンパスも今学期でその役目を終えてしまいます。何だか名残惜しいですね。

内容について

皆様の答案に必要に応じてコメントを付けていますので、参考にして下さい。

[**1**]　まずは偏微分の練習問題。本質的には $\dfrac{y}{x}$ の微分（x 微分 or y 微分で形が変わる）に違いが出るだけです。それぞれ 2 回ずつ微分して足し、きちんと消えれば正解です。

- $f_x(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}, \quad f_{xx}(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
- $f_y(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

というわけで、2 階偏微分どうしを足せば 0 になりました。ちなみに、このような $f_{xx}+f_{yy}=0$ をみたす関数[1]のことを **調和関数（harmonic function）**と呼びます。例えば

$$f(x,y) = e^{-x}\cos y, \quad g(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right), \quad h(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

などは全て調和関数です（チェックしてみましょう☆）。

[**2**]　さて重要な**陰関数**[2]の問題の登場です。期末試験範囲の目玉の一つですから、しっかりマスターしたいですね！ ここでは 1 階微分と 2 階微分を求めますが、超便利な公式：

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \quad y'' = -\frac{F_y^2F_{xx} - 2F_xF_yF_{xy} + F_x^2F_{yy}}{F_y^3}$$

は要チェックです。持ち込み用紙にも書いておくことをオススメします☆

[1]正確には **Laplace 作用素 (Laplacian)** $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を作用させると消えてしまう、という状態をいいます。

[2]陰関数（implicit function）：その名のとおり「陰に」隠れている関数という意味から来ています。2 変数の方程式の中にはいくつかの 1 変数関数が（制約付きで）隠れていますが、これはきちんと求められるときもあれば、式が複雑で求められない場合もあります。しかしそんな時でも微分は計算出来るので、これを頼りに関数の挙動を探ることが出来ます。皆さんの習った**陰関数定理**は解析学では無くてはならない「微積の王様」なのです！

但し一点だけ、先の公式は $F_y \neq 0$ **の場合にのみ使える** ことに注意してください。あまり目立ちませんが、この条件には常に気をつけないと思わぬところで「ぼろ」が出ることがあります。

とはいえ、ここでは単に計算するだけ。$F(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ とおいて 2 階偏微分まで全て計算すれば

$$F_x = 3x^2 - 3ay, \quad F_y = 3y^2 - 3ax, \quad F_{xx} = 6x, \quad F_{xy} = -3a, \quad F_{yy} = 6y$$

となるので

- $y' = -\dfrac{F_x}{F_y} = -\dfrac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$
- $y'' = -\dfrac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3} = -\dfrac{2\left(x^4 y - 3ax^2y^2 + xy^4 + a^3xy\right)}{(y^2 - ax)^3}$

と計算出来ます。特に 2 階微分は少し計算が面倒ですが、出来なかった方はもう一度自分の手で確かめてみましょう。

[**3**]　さてまたもや目玉の**極値問題**です。これがきちんと出来れば、2 変数関数の微分はほぼ慣れたと言っても良いかもしれません。ここでは先ほどの公式に少し手を加えます。

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \quad y'' = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy} + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

まず 1 つめの $y' = 0$ を解くことで**極値 の候補** が見つかります。この「候補」という所に注意。この点が極値を持つかどうかはこの時点では分かりません[3]。そこで 2 つめの y'' の正負をチェックし、**正ならば極小、負ならば極大**になります。ここで y'' を計算するのが少し面倒そうですが、今 $y' = 0$ の状態を考えていますから、1 つめの式で $F_x = 0$ となっていることに気づけば、2 つめの式は

$$y'' = -\frac{F_{xx}}{F_y}$$

と非常にスッキリしていることが分かります。極値問題で計算する時にはこれを使いましょう !!

さて問題は $x^2 + 4xy + y^2 + 1 = 0$ の陰関数 を考えています。左辺を $F(x,y)$ とおいて公式を使えば

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{x + 2y}{2x + y}$$

となる**（但し** $2x + y \neq 0$ **の下）**ので、$y' = 0$ から $x + 2y = 0$ を得ます。$y = -\dfrac{x}{2}$ を最初の方程式に代入して整理すれば $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ と求まるはずです。これが**極値の候補。**ここで y'' の出番：

$$y'' = -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{2}{2y + 4x} = -\frac{2}{3x}$$

なので、$x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **の時は** $y'' < 0$ **ゆえ極大、一方** $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ **の時は** $y'' > 0$ **ゆえ極小**であることが分かりました。後はそれぞれの y の値ですが、これは最初の方程式に $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ を代入すれば y の 2 次式になり、それを解くだけですね。**極大値は** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$**、極小値は** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **になるはずです。**

[3]例えば高校数学の例だと $f(x) = x^3$ など。これは $x = 0$ で $y' = 0$ となりますが、これは「極値をとる」とは言わなかったのでした。

[4]　もう少しレベルアップ。ラストを飾るのは **Lagrange の未定係数法**を用いた**最大最小問題**です。未定係数法自体「読んでもよく分からない」「どうやって使うの？」という方も多かったのでは？今は余り有難みが分からないと思いますが、この手法は数学のみならず、建築設計や数理ファイナンスなどで幅広く登場する「お役立ちメソッド」です。余裕がある人向けの問題でしたが非常に重要ですので、複雑な問題はダメでもこれくらいであれば解けるようになっておいて欲しいと思います。

問題は $z = xy$（これを $f(x,y)$ とおきましょう）の最大最小を論ぜよというものですが、**束縛条件** $x^2 + y^2 = 1$ が付いています。(x,y) をこの円上でのみ考えるということですが、このように「良い」定義域の時でないと最大値や最小値を考えることが出来ないので注意してください。

> **細かい補足（でも重要）：**正確に最大最小を論ずるには、**定義域が「有界閉集合」で、その上で関数が連続であること**が条件です。「有界」とは「終わりがあること」「どこまでも遠くへは行けない」状態で、「閉集合」とは「境界線がはっきり見えている」状態だと思ってもらえば OK。閉集合でない＝定義域にふちのない場合（例えば $f(x) = x^2$ で $0 < x \leq 2$）などでは最大値／最小値が存在しない可能性があるので、こういう場合は除外。さらに有界でない＝例えば関数が発散して不連続の場合（$f(x) = 1/x$ で $-1 \leq x \leq 1$）も同じ事が言えます。こういうことが起こらないかどうかを最初にチェックしなければ正しい答えとは言えません。

ここでは $f(x,y)$ は明らかに連続、束縛条件も問題ありませんので、安心して計算しましょう。

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 (= 0)$$

とおきます。**Lagrange の未定係数法**により、関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で極値をとったとすると

(a)　$a^2 + b^2 = 1$

(b)　$f_x(a,b) + \lambda\varphi_x(a,b) = 0$　$\cdots$　計算すると $b + 2a\lambda = 0$

(c)　$f_y(a,b) + \lambda\varphi_y(a,b) = 0$　$\cdots$　計算すると $a + 2b\lambda = 0$

となるような λ が存在します（ここまでが未定係数法の主張）。そこで (b),(c) から λ を消して

$$a^2 = b^2$$

を得ます[4]。これと (a) より

$$(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

と求まります。この 4 点が**極値ないし最大値、最小値をとる点の候補**ですが、ここで最初の議論から、**この中に最大値、最小値をとる点が必ずあることが保障**されます。実際に値を求めてみると

- $(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **のとき最大値** $f(a,b) = \frac{1}{2}$
- $(a,b) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **のとき最小値** $f(a,b) = -\frac{1}{2}$ **をとる**

ことがわかります。正確な計算と言葉運びが必要ですが、決して解けない問題ではないのでチャレンジしてみてくださいね☆

[4]計算する時には次に注意：**(1) $\lambda \neq 0$ である。**これは $\lambda = 0$ とすると $a = b = 0$ となり条件 (a) に反する。／ **(2) a と b はどちらも 0 でない。**これはどちらかが 0 であるとすると (b) or (c) よりもう一方も 0 となり、$a = b = 0$ でやはり条件 (a) に反する。

定期試験向け練習問題の略解 　※ 1 月 22 日（木）に配布した練習問題の略解です

練習問題 [1] 　ひたすら頑張りましょう。答えは

- $f_x = \cos(x\cos(y\sin z))\cos(y\sin z)$
- $f_y = -\cos(x\cos(y\sin z))x\sin(y\sin z)\sin z$
- $f_z = -\cos(x\cos(y\sin z))x\sin(y\sin z)\cos z$

練習問題 [2] 　(a) f_4 　(b) なし 　(c) f_2 　(d) f_1

ちなみに (b) のような関数は**存在しません。**テキストに載っている定理からわかりますね。

練習問題 [3] 　グラフをよく見ると大きなヒントが隠されています。

- 脚注にもあったように、課題 7 の答案&解説にならって解きましょう。極限値は 0 で、m に依存しないことがわかります。
- 図を見てピンと来た方もいたかもしれません。答えは 連続である が正解。$|\arctan x| \leq \dfrac{\pi}{2}$ から

$$\left|x^2+y^2\right| = \left|\left(x^2+y^2\right)\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

となるので、$(x,y)\to(0,0)$ の近づけ方によらず $f(x,y)\to 0 = f(0,0)$ となり、$f(x,y)$ は連続です。

練習問題 [4] 　**陰関数定理**を使います（陰関数が定義できることの証明は略）。点 P における微分係数は

$$\varphi'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{2}{2} = -1$$

と公式からすぐに求められますね。切断面からも点 $(1,0)$ の傾きが -1 になっていることが読み取れます。

練習問題 [5] 　(a) と (b) は連動していますが、少々細かい議論が必要でした。

(a) 停留点（$f_x = f_y = 0$ となる点）は (π,π), $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ の 3 つ。続いて Hesse 行列は

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

だから $H(\pi,\pi) = 0,\ H\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right) = H\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{4} > 0$ となります。あとは f_{xx} の値を調べれば、$\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$、$\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{5\pi}{3}\right)$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる ことがわかります。一方 (π,π) でどうなっているかは Hessian$=0$ ゆえ不明ですが、$f(x,x) = 2\sin x + \sin 2x = 2\sin x(1+\cos x)$ であり、$x=\pi$ を境に正負が変わっている（$x<\pi$ のとき $f>0$, $x>\pi$ のとき $f<0$）ことから、(π,π) では極値をとらないことが言えます。

(b) 内接する三角形の内角を x,y,z とおけば、正弦定理より周の長さは $\sin x + \sin y + \sin z$ と書けますが、内角の和が π であることから $z = \pi - (x+y)$ なので、周の長さは実質 2 変数関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(\pi-(x+y)) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ で表せます。ここで (a) の極値問題の内容が使えますが、上で求めた極大値が本当に最大値になっているかどうかをチェックしなければいけません。まず $x,y\geq 0,\ x+y\leq\pi$ で考えるので、この中できちんと最大値と最小値がとれることがわかります（今回のプリント：課題 9-[4] 参照）。ここで境界（$x=0,\ y=0$, $x+y=\pi$ などの部分）における最大値は 2 であり（要チェック）内部での極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ よりも小さいので、最大値をとるならば内部でとることがわかります。これよりこの極大値が最大値であることが示されたことになるのです。というわけで最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ であり、ちなみにこの時**正三角形**になっています。

練習問題 [6] 　公式をうまく使って解きます（媒介変数表示・極座標表示 etc.）。答えは

$$\text{(a) } 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(\sqrt{2}+1\right) \qquad \text{(b) } 6a \qquad \text{(c) } \frac{8}{3}\left\{\left(\pi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$$

です。分からなかった方はテキストなどを見直してみましょう。

それでは、定期試験に向けてがんばってください☆