微分積分学・同演習 B　中間試験についての補足資料

担当教員：高山晴子（九州大学大学院数理学研究院）
TA：横山俊一（九州大学大学院数理学府修士課程）

■　**中間試験の答案ならびに持込用紙を返却**しました。採点ミス等はお早めにお申し出ください。
■　持込用紙右上の緑色の数字は**「課題 5 終了時点でのあなたの平常点」**です。

重要 この科目（微分積分学・同演習 B）の成績について

この科目の最終的な成績は以下のようにして決まる予定です。参考にして下さい。

- この**中間試験**の得点を **50 点満点**に換算（＝得点を 2 で割ってください）
- 学期末の**定期試験**の得点も **50 点満点**に換算（試験は同じく 100 点満点の予定）
- **平常点**（毎回のレポート）が **20 点満点**
  - 平常点の評価対象は **課題 8（2009 年 1 月 8 日提出分）まで** です。
    課題 9（2009 年 1 月 22 日提出分）は 2 回の試験を含む最終得点が GPA 評定の境界にある場合の**得点調整**に使用します。
- 上の 3 つを合計したものが最終得点。**計 120 点満点／ 60 点以上で合格** となります。
  ※ 小数点以下の「端数」は各々四捨五入して足し合わせます。
- 初回に「中間の救済は行わない」と予告致しましたが、得点が伸び悩んでいるようですので、急遽**救済プラン**を出すことにしました。**この資料の最後（No.5）をご覧ください。**

定期試験について

- 定期試験（期末試験）は **2009 年 2 月 5 日（木）：試験期間第 2 週目** の予定です。
- 定期試験予告（持込用紙）は **講義最終回（2009 年 1 月 22 日）に配付** 致します。
  これは中間試験のものとは違い、**定期試験を除いた成績表**を兼ねています。従ってこの用紙は**必ず本人が受け取ってください。**詳細は当日お知らせ致します。

採点結果と解説

人数	総点 (No.1/No.2)	平均 (合計)	1 枚目平均	2 枚目平均	最高点
54	100 (65/35)	**51.1**	37.7	13.4	85

平均点は合計を人数割りし小数第 2 位を四捨五入した値です。
答案用紙 1 枚目の得点欄に記載された点数が合計得点、その右下にある括弧付けの点数が 1 枚目の合計、答案用紙 2 枚目の得点欄に記載された括弧付けの点数が 2 枚目の合計です。

得点	100〜90	〜80	〜70	〜60	〜50	〜40	〜30	29〜0
人数	0	4	5	14	9	9	5	8

[1]　不定積分 3 連発。各 10 点のサービス問題でしたが . . . いかがでしたか？もしかすると (3) などは少し悩んだかもしれませんが、実はテクニックは宿題で使ったものばかりでした。一つずつ確認してみましょう。

(1)　まずは腕試しに $\displaystyle\int \arcsin x dx$ です。$y = \arcsin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと、$x = \sin y$ で $0 \leq \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$, $dx = \cos y dy$ なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= \int y\cos y dy = y\sin y - \int \sin y dy \\ &= y\sin y + \cos y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となります。積分定数 C はつけてもつけなくても OK とします。

(2)　次は宿題で登場した $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^3}$ です。再録ですが以下の通り：
まず前半のキーワードは**部分分数分解**。$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ なので、被積分関数を部分分数に分解すると

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$$

と分解出来ます。この調子で計算していけば

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left\{\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right\} dx \\ &= \int \left\{\frac{\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\right\} dx \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

再度忠告。最後から 2 番目の行の 2 項目の log の絶対値が消えていることに注意してください（$x^2 - x + 1 = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ となるため）。それから最後の行の最後の項、積分計算には arctan の公式を使います。ただし x の部分が少し変形していますから、係数を間違えないように慎重に計算しましょう。

(3)　さて最後は $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ の計算。これは宿題でやった $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ の計算と同じアイデアを使うことに気付いたでしょうか？
$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおく（ここが同じアイデア！）と $dx=\dfrac{2}{1+t^2}dt$ で、$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $1+\sin x=\dfrac{(t+1)^2}{1+t^2}$ だから

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx &= \int \frac{2t}{1+t^2}\times\frac{1+t^2}{(t+1)^2}\times\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{4t}{(t+1)^2(1+t^2)}dt\\ &= \int\left\{\frac{-2}{(t+1)^2}+\frac{2}{t^2+1}\right\}dt=\frac{2}{t+1}+2\arctan t\\ &= \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+2\times\frac{x}{2}=x+\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\end{aligned}$$

と計算できました。上の式変形の 1 行目から 2 行目へ移るときは部分分数分解をやっていますが、(2) でやるような方法（未知数を恒等式で求める）だと時間がかかってしまいます。ピンとくれば一気に積分公式へと持ち込むことができるでしょう。

[2]　さて前半のハイライト。宿題では皆さんちょっと（？）苦戦していた**漸化式**の登場です。

$$I_n=\int(\sin x)^n(\cos x)^{-n}dx$$

で定義します。部分積分のテクニックが問われる、なかなか良い問題です。

(1)　とはいえ、解き方は宿題の時と全く同じです。覚えていた人にとってはカンタンでしょう。

$$\begin{aligned}I_n &= \int(\sin x)^n(\cos x)^{-n}dx=\int(\sin x)^{n-1}\times(\sin x)(\cos x)^{-n}dx\\ &= \frac{1}{n-1}(\sin x)^{n-1}(\cos x)^{-(n-1)}-\int(\sin x)^{n-2}(\cos x)^{-(n-2)}dx\end{aligned}$$

となって、漸化式

$$I_n=\frac{1}{n-1}(\tan x)^{n-1}-I_{n-2}$$

が求まります。**部分積分のパーツ選びを誤ると欲しい漸化式は手に入りません。**部分積分は出てくる式を「先読み」するスキルも要求しますので、なかなか奥が深いですね！

(2)　続いて I_2 を求めますが、これは上の漸化式を使えば一発ですね。

$$I_2=\tan x-I_0$$

となる（$n=2$ を代入）ので、$I_0=\displaystyle\int dx=x$ から $I_2=\tan x-x$ と求まります。

[3]　不定積分に続き、今度は定積分 2 連発。変数変換をキチンと出来るかがポイントです。

(1)　まず $\displaystyle\int_0^1\log\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ を計算します。$\sqrt{x}=t$ とおくと、$x:0\to1$ のとき $t:0\to1$ と動き、$x^2=t,\,dx=2tdt$ なので

$$\int_0^1\log\left(1+\sqrt{x}\right)dx = \int_0^1\log 2t(1+t)dt=\left[t^2\log(1+t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^2}{1+t}dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \log 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \log 2 - \left[\frac{t^2}{2} - t + \log|t+1| \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

と計算されます。これは高校数学でも出てくるので、馴染み深い人も多かったのでは??

(2) さて、もうひとつの $\displaystyle\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx\ (a>0)$ も、正確な計算スキルを身につけていれば大丈夫な問題でした。

これは $\displaystyle\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx = t$ とおきましょう。このとき $x: 0 \to a$ に対し $t: 0 \to \pi/4$ と動き、更に $x = a\tan^2 t,\ dx = \dfrac{2a\tan t}{\cos^2 t}dt$ となるので

$$
\begin{aligned}
\int_0^a \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+a}}dx &= 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \times \frac{\sin t}{\cos^3 t}dt = 2a\left\{ \left[t \times \frac{1}{2\cos^2 t} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 t} \right\} \\
&= 2a\left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\tan t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right\} = 2a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)
\end{aligned}
$$

と計算されます。アイデアは [1] の (1) と同じですから、割とトントン計算出来るか、もしくは合成関数にあわててしまい、ず〜んと詰まってしまうかだと思います . . .。

[4] ここで後半のハイライト。広義積分を用いた漸化式の計算問題です。

$$
I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}
$$

から、誘導に従って計算していきましょう。

(1) 漸化式 $I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n}I_n$ を導く問題です。答えが分かっているのであとはうまく形をつくるのみ。

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \left[\frac{t}{2n(1+t^2)^n} \right]_0^\infty + \frac{2n-1}{2n}\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\
&= \frac{2n-1}{2n}I_n
\end{aligned}
$$

上の計算には、宿題で示してもらった漸化式

$$
I_{m+1} = \frac{x-a}{2mb^2\left\{(x-a)^2+b^2\right\}^m} + \frac{2m-1}{2mb^2}I_m
$$

を少し変形して使います。宿題では I_m は不定積分 $I_m = \displaystyle\int \frac{dx}{\left\{(x-a)^2+b^2\right\}^m}$ でしたが、今回は（広義積分ですが）積分範囲が指定されていますから

$$
I_{m+1} = \left[\frac{x-a}{2mb^2\left\{(x-a)^2+b^2\right\}^m} \right]_0^\infty + \frac{2m-1}{2mb^2}I_m
$$

で $I_m = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left\{(x-a)^2+b^2\right\}^m}$ と範囲を制限してあげれば同様に使える、というわけです。ちょっと考えるかもしれませんが、不定積分と定積分の関係をしっかりつかんでおきましょう。

もしくは先の関係式を忘れてしまった方は、がんばって以下のようにしても解けます。

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{(t)'}{(1+t^2)^n}dt \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^n + \int_0^N \frac{n\times 2t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{N}{(1+N^2)^n} + 2n\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt \\
&= 2n\lim_{N\to\infty}\int_0^N\left(\frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt \\
&= 2n\left(\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dt}{(1+t^2)^n} - \lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}\right) \\
&= 2n\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n} - 2n\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = 2nI_n - 2nI_{n+1}
\end{aligned}
$$

部分積分だけで片付いてしまいますが、思いつくかどうかはやはり「慣れ」でしょうね . . .。

(2)　これはサービス問題☆ (1) が解けなくても大丈夫。

$$
I_1 = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^\infty = \frac{\pi}{2}
$$

で OK！

(3)　さて、(1) と (2) を使って計算するユニークな穴埋め問題。宿題でも紹介したテクニック（Wallis の公式を引き合いに出したやつです）が使えているかどうかをチェックする問題でした。地道に計算して

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} \\
&= \frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}I_{n-2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{2n-3}{2n-2}\times\frac{2n-5}{2n-4}\times\ldots\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_1 \\
&= \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}\left((n-1)!\right)^2}\times\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n-2)!\pi}{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}
\end{aligned}
$$

と計算できるので、$\boxed{}$ には $\underline{2^{2n-1}\left((n-1)!\right)^2}$ があてはまりますね。分子の形を求めるために

$$
\frac{2n-2}{2n-2}, \frac{2n-4}{2n-4}, \frac{2n-6}{2n-6}, \ldots
$$

と次々かけていく手法は割とやるテクニックなので、覚えておいて損はないでしょう。

[5]　ラストは広義積分 2 発。計算問題は配点も高く、高得点を狙うには是非とも得点してほしいところでした。

(1)　これはサービス問題！宿題でやった $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ の計算です。これも再録になりますが、以外に積分操作が面倒なのでもう一度解説しておきますね。

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 1-0}\int_0^{\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$$

と書いたら $\displaystyle\sqrt{\frac{x}{1-x}} = t$ と変数変換します。このとき変数の区間は

$$[0,\varepsilon] \to \left[0, \sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\right]$$

です。さらに $\displaystyle x = 1 - \frac{1}{t^2+1}$, $\displaystyle dx = \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt$ ゆえ

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx &= 2\lim_{\varepsilon\to 1-0}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} \left\{\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{(t^2+1)^2}\right\}dt \\
&= 2\lim_{\varepsilon\to 1-0}\left\{[\arctan t]_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} - \left[\frac{t}{2(t^2+1)}\right]_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}\frac{dt}{t^2+1}\right\} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 1-0}\left\{\arctan\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right\} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

と計算されます。上から 2 行目の部分にまたもや宿題で示してもらった式

$$I_{m+1} = \frac{x-a}{2mb^2\{(x-a)^2+b^2\}^m} + \frac{2m-1}{2mb^2}I_m$$

を使っています（但し今度は $\displaystyle I_m = \int\frac{dx}{\{(x-a)^2+b^2\}^m}$ と不定積分で考えます）が、地道に計算することで求められます。これまで扱ってきた公式や変数変換の方法などを組み合わせて解く、良い演習問題です。

(2)　そして最後は $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$ でした。こんなところにもサービス問題が !!

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x^2}dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-N^2}\right) = \frac{1}{2}$$

でおしまいです。めでたしめでたし☆

ボツになった問題たち

直前まで候補に残ったものの、やむなく削除された問題たちを挙げておきます。復習の助けにしてください。

- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}dx$　（定積分：[3]）

変数変換は [1] の (3) と同じように、$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおいてみます。すると変数は $x: 0 \to \pi/2$ のとき $t: 0 \to 1$ で $1+\cos x = \dfrac{2}{1+t^2}$, $dt = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)dx = \dfrac{1}{2}(1+t^2)dx$ i.e. $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ となるので

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}dx &= \int_0^1 2\arctan t \times \frac{1+t^2}{2} \times \frac{2}{1+t^2}dt \\
&= [2\arctan t]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = [2\arctan t]_0^1 - \left[\log(1+t^2)\right]_0^1 \\
&= 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \log 2 = \frac{\pi}{2} - \log 2
\end{aligned}$$

と計算されます。これは落ち着いて考えれば問題ないでしょう。

- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　（広義積分：[5]）

ちょっと置換の方法が tricky ですが . . . まず $\sqrt{1-x^2} = (x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$ と変形し、$\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} = t$ とおきます。$x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{-4tdt}{(t^2+1)^2}$, $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{2t}{t^2+1}$ なので、計算は以下のような感じになります。

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\int_\delta^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\int_{\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta+1}}}^{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+1}}} \frac{-2}{t^2+1}dt \\
&= -2\lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\left[\arctan t\right]_{\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta+1}}}^{\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+1}}} \\
&= -2\lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\left\{\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+1}} - \arctan\sqrt{\frac{1-\delta}{\delta+1}}\right\} \\
&= -2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

さて、上のような変形が思いつかなくても次のようにして解くこともできます。まず $1-x^2>0$ より $-1<x<1$ ですから $x = \sin t$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと、$x: -1 \to 1$ のとき $t: -\dfrac{\pi}{2} \to \dfrac{\pi}{2}$ で $dx = \cos t dt$, $\sqrt{1-x^2} = |\cos t| = \cos t$（$t$ の範囲から）となりますから、

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}\int_{\arcsin\delta}^{\arcsin\varepsilon}\frac{1}{\cos t}\times\cos t dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to1-0,\delta\to-1+0}[t]_{\arcsin\delta}^{\arcsin\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to1-0}\arcsin\varepsilon - \lim_{\delta\to-1+0}\arcsin\delta \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

という感じで計算出来てしまいました。ちょっと記号が煩雑なので注意してくださいね。

配点と出典

- **問題** [1]　**各 10 点** $\times$**3**

  不定積分。(1) はテキスト p86。(2) は課題 3。

- **問題** [2]　**(1) 10 点　(2) 5 点**

  不定積分を用いた漸化式。課題 4。

- **問題** [3]　**各 10 点** $\times$**2**

  定積分。(1) は課題 4。

- **問題** [4]　**各 5 点** $\times$**3**

  広義積分を用いた漸化式。p108 の一部を抜粋。一部で課題 5 を含む。

- **問題** [5]　**各 10 点** $\times$**2**

  広義積分。(1) は課題 5。

計 100 点満点

今後の日程

日程は変更となる可能性がありますのでご注意ください。

- **2008 年**
  - 12 月 11 日　**課題 6 提出日**
  - 12 月 18 日　**課題 7 提出日**　課題 6 返却
- **2009 年**
  - 1 月 8 日　**課題 8 提出日**　課題 7 返却
  - 1 月 15 日　**センター試験準備のため休講**
  - 1 月 22 日　**課題 9 提出日**　課題 8 返却　**定期試験予告（持込用紙）配付**
  - 1 月 29 日　試験期間（授業なし）

    課題 9 答案＋配布資料は 1 月 26 日（月）以降事務窓口にて返却する予定です。
  - 2 月 5 日　**定期試験**

それでは、次回もがんばってください☆

重要　救済レポート

- **中間試験の得点が 30 点未満の方（8 名）への救済プランです。**
  - **以下に挙げた問題（6 題）から 4 題以上解き、レポートとして提出してください。**
    - ∗ 既定問題数に達していないレポートは**採点しません。**また、ほとんど解いていないに等しい問題はカウントしません。
  - **問題は 1 題 4 点、計 24 点満点です。完全な解答にのみ得点を与えます（部分点なし）。**
  - 用紙は A4 または B5 のレポート用紙を使用し、左上をホッチキスで留めて提出してください。1 枚目の上部に**学生番号・氏名**を忘れずに書くこと。
  - このレポートの得点を **30 点を超えない範囲で中間試験の得点に上乗せ** して差し上げます。例えば
    - ∗ 中間試験 20 点＋レポート 8 点＝**中間試験 28 点**に修正
    - ∗ 中間試験 20 点＋レポート 16 点＝**中間試験 30 点**に修正

    という具合です。
  - **提出期限は 12 月 18 日（木）講義終了後まで（厳守）。以降は一切受け付けません。**
    答案は来年 1 月 8 日（木）の講義にて返却致します。また当日の配布資料に解説を掲載します。
- **提出は任意です。救済が不要という方は提出する必要はありません。**

∗∗∗

レポート問題 [1]　次のような**問題**に対するある人の**解答**：

問題　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ を計算せよ。

解答　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1}=-1-1=-2$

上の解答は**誤りである。**どこが間違っているのかを簡潔に説明した上で、正しい解答を付けよ。

レポート問題 [2]　不定積分 $\displaystyle\int x^n\log x\,dx$ （n は整数）を計算せよ。

レポート問題 [3]　以下の $\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ を埋めよ。**求めた手順（途中経過）も示せ。**

不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x(x-1)^2}dx$ を計算してみよう。まず x^4+1 を $x(x-1)^2$ で割ると、商は $\boxed{1}$ で余りは $\boxed{2}$ なので

$$\frac{x^4+1}{x(x-1)^2}=\boxed{1}+\frac{\boxed{2}}{x(x-1)^2}$$

と書ける。ここで更に

$$\frac{\boxed{2}}{x(x-1)^2}=\frac{\boxed{3}}{x}+\frac{\boxed{4}}{x-1}+\frac{\boxed{5}}{(x-1)^2}$$

と部分分数分解できるから、結局

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+1}{x(x-1)^2}dx &= \int\left\{\boxed{1}+\frac{\boxed{3}}{x}+\frac{\boxed{4}}{x-1}+\frac{\boxed{5}}{(x-1)^2}\right\}dx\\ &= \boxed{6}+C\end{aligned}$$

と計算できる（但し C は積分定数）。

レポート問題 [4]〜[6] は裏面にあります

レポート問題 [4]　以下の $\boxed{\ 1\ }$〜$\boxed{\ 4\ }$ を埋めよ。**求めた手順（途中経過）も示せ。**

不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ を以下の手順に従って計算しよう。

- まず $x = \dfrac{1}{\sin t}$ とおいて I を t に関する積分に変形すると $I = \boxed{\ 1\ }$ となる。
- 次に $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とおけば、$\dfrac{du}{dt}$ は u を用いて $\dfrac{du}{dt} = \boxed{\ 2\ }$ と書ける。
- ここで $\sin t = \sin 2\left(\dfrac{t}{2}\right)$ とみなせば、$\sin t$ を u を用いて $\sin t = \boxed{\ 3\ }$ と表すことができる。
- 以上より、求める不定積分は $I = \boxed{\ 4\ }$ である。

レポート問題 [5]　$I_n = \displaystyle\int_0^1 (\arcsin x)^n dx$ とおく。これは漸化式

$$I_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - n(n-1)I_{n-2}$$

をみたす事を示せ。また I_2 の値を求めよ。

ヒント　**まず変数変換により** $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \cos t dt$ **を示し、これを計算してみよ。**

レポート問題 [6]　区間 $[0, 2\pi]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

で定まる級数を $f(x)$ の **Fourier 級数**[1]といい

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

と書く。今、$f(x) = \dfrac{\pi - x}{|\pi - x|}$ に対し、その Fourier 級数は

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right)$$

と表されることを示せ。すなわち

- **すべての** n **に対して** $a_n = 0$
- n **が偶数のとき** $b_n = 0$, n **が奇数のとき** $b_n = \dfrac{4}{\pi n}$

であることを示せ。

ヒント　**上の問題を解くのに級数の知識は必要ない。単純に** a_n, b_n **を計算すればよい。**

[1]工業系に進む人には馴染み深い対象。与えられた関数の「三角関数を用いた」近似です。