問題2-3 (3)　　$K_4 = \{(1), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$

$K_4$ (Klein's four gp.) は $S_4$ の $S_3$ に対する左完全代表系？

$\Longrightarrow$ 　$\sigma \in S_4$ に対して　$\underline{\sigma S_3}$ を考えたときに

$\exists^1 k \in K_4$ s.t. $\sigma S_3 = k S_3$ が成り立つか？ ということ。

ここの「ただ1つ」が「完全」(代表系)であるということ！

pf. 　$\sigma \in S_4$ に対して、$\exists^1 k \in K_4$, s.t. $\underline{k\sigma(4) = 4}$ がなりたつ。

ただ1つ定まる！

∵ $K_4$ の元はそれぞれ

$(1)$ … 4 が 4 にうつる

$(1\ 3)(2\ 4)$ … 2 が 4 にうつる

$(1\ 2)(3\ 4)$ … 3 が 4 にうつる

$(1\ 4)(2\ 3)$ … 1 が 4 にうつる。

ような元だから、$\sigma(4) \in \{1, 2, 3, 4\}$ なので、$\sigma(4)$ の値に応じて、その値が 4 にうつるような $K_4$ の元が唯一つ定まる。

そうすると、$k\sigma \in S_3$ (← 4 を動かさないので、$\{1, 2, 3\}$ の置換)

∴ $\sigma \in k^{-1} S_3$ となる。この時実は $k^{-1} = k$ (∵ 合同変換)

なので、結局 $\sigma \in k S_3$ 　∴ $\sigma S_3 = k S_3$ 　//

Rem: 上の問題がもう少し進むと

「$K_4$ と $S_4/S_3$ は合同か？」

という問題になる。これは準同型

$$f: K_4 \longrightarrow S_4/S_3$$
$$k \longmapsto k S_3$$

(well-defined + hom ?)

を考えて、更に $\# K_4 = \# S_4/S_3 = 4$ であることが分かっているので

$f$ が全射である事が言えれば、$f$ は同型 i.e.

$$K_4 \cong S_4/S_3$$ (同じ構造を持つ)

ことが分かる。(もう少し後で…)

2008. 10. 20