◎ S_4 から ~~D_{60}~~ $\downarrow$ D_{30} への準同型をすべて挙げよ.

※ 聞いたところ, 問題文のミスだったようです
(先生は D_{30} のつもりだったらしい…)
D_{60} だとすべて挙げるのはかなり難しいですね
(特に $\mathrm{Ker} f = \{e\}$ のとき。こないだのようになります)

一応, D_{30} での答えを書くので参考にして下さい:

- S_4 の正規部分群は $\{e\}$, V_4, A_4, S_4 の4つ.
- $D_{30} = E_{30} \rtimes \langle \sigma \rangle$ と書けることに注意.

但し. $E_{30} := \{ e^{\frac{n\pi i}{15}} \mid n \in \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \}$ (1の30乗根のなす群)
$\langle \sigma \rangle$: 複素共役の生成する群. (つまり $\sigma^2 = id$)

☆ 上の4つの正規部分群を核に持つ $f: S_4 \longrightarrow D_{30}$ を分類すればOK.

① $\mathrm{Ker} f = \{e\}$ のとき. $\# \mathrm{Im} f = \# S_4 = 24 \nmid 60 = \# D_{30}$ (割り切れない)
だから, このような準同型 f は存在しない.

② $\mathrm{Ker} f = S_4$ のとき. f は自明な準同型 (全ての S_4 の元が D_{30} の単位元にうつる)

③ $\mathrm{Ker} f = A_4$ のとき. $\mathrm{Im} f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{準同型定理}}}{\cong} S_4 / A_4 \cong \{\pm 1\}$

これにより, f は次のように与えられる:

$$f: S_4 \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{置換の符号}}]{sgn} \{\pm 1\} \xrightarrow{\iota_g} D_{60}$$

ι_g は次の通り:

$$\iota_g(x) := \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ \underset{\substack{\shortparallel \\ -1}}{g} & (x = -1) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} g \in \sigma E_{30} \cup \{-1\} \\ \text{つまり } g = -1 \text{ のこと.} \end{array} \right)$$

④ $\mathrm{Ker} f = V_4$ のとき $\mathrm{Im} f \underset{\substack{\uparrow \\ \text{準同型定理}}}{\cong} S_4 / V_4 \cong S_3 \cong D_3 = E_3 \rtimes \langle \sigma \rangle$

準同型定理によって f が引き起こす単射準同型

$$f : E_3 \hookrightarrow D_{30}$$

を考えると、これは E_3 の生成元 $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ を位数3の元に送る。i.e. (D_{30} の)

$$f(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \in D_{30}$$

更に D_3 の複素共役の像 $f(\sigma)$ を見ると、

$$Ad(f(\sigma))\, e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} = f(Ad(\sigma)\, e^{\frac{2\pi i}{3}}) = f(e^{-\frac{2\pi i}{3}}) = e^{\mp\frac{2\pi i}{3}}$$

(複号同順)

をみたすので、$f(\sigma)$ は D_{30} の複素共役でなければならない。

よって、このような準同型は

$$f_\pm(\zeta) := \zeta^{\pm 1} \quad (\zeta \in E_3), \quad f_\pm(\sigma) := \sigma$$

で与えられる2つが考えられる。

(ζ を ζ にうつすものと ζ^{-1} にうつすものの2通り。何れにしても σ は動かさない、ということ)

以上 //

◎ 群 $G \triangleright H$, $H \triangleright K$ のとき $G \triangleright K$ か?

⇝ X

(反例) Klein の4元群 V_4 は A_4 の正規部分群

$\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ は V_4 の正規部分群

しかし、$\langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$ は A_4 の正規部分群ではない。 //

◎ $f: G \longrightarrow H$ 準同型 の Ker と Im がどちらもアーベル

$\Longrightarrow$ G はアーベルか?

⇝ X

(反例) もっと簡単な例:

$\mathrm{sgn} : S_3 \longrightarrow \{\pm 1\}$ のとき、$\mathrm{Ker}(\mathrm{sgn}) = A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$,

$\mathrm{Im}(\mathrm{sgn}) = \{\pm 1\}$ は共にアーベル。

しかし、S_3 はアーベルではない。 //