◎ $M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ への hom ?

(∵) $\phi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ : hom とする

$\mathrm{Ker}\,\phi$ は $M_n(\mathbb{R})$ の両側 ideal $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}\,\phi = (0)$ or $M_n(\mathbb{R})$

$\mathrm{Ker}\,\phi = M_n(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \phi$ は零写像

$\mathrm{Ker}\,\phi = (0) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\phi \cong M_n(\mathbb{R})_{(/(0))}$ (準同型 th.)

でも $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathbb{R}$ で $\mathbb{R}$ は可換環.

一方 $M_n(\mathbb{R})$ は非可換環 ∴ 矛盾.

∴ $\phi$ : 零写像のみ //

◎ $\phi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ の Ker ?

$f(x) \longmapsto f(\sqrt{-3})$

※ $\mathbb{R}[X]$ の Euclid を使えばすぐ示せる: $\left( f = (x^2+3)g + r \quad \deg r \leq 1 \right)$

(∵) $(X^2+3) \subset \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{R}}$ は OK. $(X^2+3) \supset \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{R}}$ を示す.

$f \in \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{R}}$ とする. $\mathbb{C}[X]$ の Euclid の原理より.

$$f(x) = (X - \sqrt{-3})\, g(X) + r \quad (g(X) \in \mathbb{C}[X],\ r \in \mathbb{C})$$

$f(\sqrt{-3}) = 0$ ゆえ $r = 0$. ∴ $(X - \sqrt{-3}) \mid f(X)$.

この複素共役をとって $(X + \sqrt{-3}) \mid f(X)$ で $\mathbb{C}[X]$ は UFD.

$$\therefore\ f(x) = (X^2+3)\, g(X)$$

この複素共役をとると. $f(x) = (X^2+3)\, \overline{g(X)}$

$\mathbb{C}[X]$ : UFD ゆえ. $g(X) \in \mathbb{R}[X]$ ((∵) $g(X) = \overline{g(X)}$)

$$\therefore\ \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{R}} = (X^2+3) \quad //$$

② $\phi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ の Ker ?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \Psi & & \Psi \\ f(X) & \longmapsto & f(\sqrt{-3}) \end{array}$$

(2)

∵ 先と同じ. $(X^2+3) \subset \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{Z}}$ は OK. $(X^2+3) \supset \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{Z}}$ を示す. 今.

$$f(X) = (X^2+3)\,g(X) \qquad g(X) \in \mathbb{R}[X]$$

と書けるが. ここで $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ であることを示せば良い.

pf. $\deg g$ に関する帰納法.

$\deg g = 0 \longrightarrow \quad g(X) = c \in \mathbb{R}$.

$$f(X) = c(X^2+3) = cX^2 + 3c$$

$f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ゆえ. $c \in \mathbb{Z}$ ∴ OK.

$\deg g = n$ で $g(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ と書くことにする.

$f(X)$ の deg は $n+2$ でその係数は $a_n$ となるので $a_n \in \mathbb{Z}$ で

$$f(X) - a_n X^n (X^2+3) \in \mathbb{Z}[X]$$

と書けて. 更に

$$f(X) - a_n X^n (X^2+3) = (X^2+3) \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

と書ける. 帰納法の仮定より. $a_k \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq k \leq n-1)$

となるから. $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ∴ $f(X) \in (X^2+3)$

$$\therefore \ \mathrm{Ker}\,\phi_{\mathbb{Z}} = (X^2+3)$$