2009 年 4 月 21 日 (火)　No.1
専攻教育科目「代数学 B・演習」（火曜 3,4 限：理学部数学科 3 年）　文責：横山 (TA,M2)

代数学 B・演習　おぼえ書き　その 1

この資料では講義内容・演習内容の解説や関連するお話など、理解の助けとなるような内容を載せます。従って内容は易しめです。もっと進んだ内容については直接聞いてください。内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **線形代数総ざらい**

  F-ベクトル空間、線形結合、部分（ベクトル）空間、生成、基底と次元、線形写像の核（Kernel）と像（Image）、線形写像を行列で表示する etc.

  線形代数の教科書が活躍します。参考書になっている「線形代数の世界」（斎藤毅著・東京大学出版会）が一番代数系に近いですが、ちょっとボリュームがあるので読み通すのは大変かもしれません（でも詳しく書いてあります）。

チェックポイント

- 上の青字の一つひとつの定義は？
- 核と像の基底と次元が行列の基本変形で分かるのはなぜ？

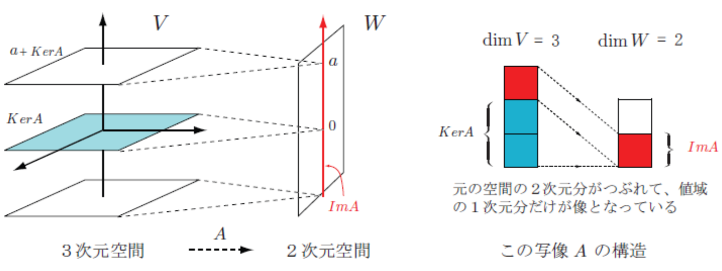
  演習問題 1-1： $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$

  4 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ 内に出来た像は 2 次元 ベクトル空間

  → 線形写像で写しているから、$\mathbb{R}^5$ の 2 次元部分空間が像として写っている

  → 残った 3 次元分はどこに行った？ → 全て $\mathbb{R}^4$ の原点に落ちている（つまり核は何次元？）

例： $A:\ V \to W$（$V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$）で $\dim \mathrm{Im}(A) = 1$ の場合[1]



次元定理　**線形写像** $\varphi : V \to W$ **に対し** $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\varphi) + \dim \mathrm{Im}(\varphi)$

[1]図は http://www.tcn.zaq.ne.jp/akayu508/document/linear_algebra.pdf からお借りしました。

- **演習問題 1-3：**証明中に「$W \cup W'$ が V の部分空間である」という仮定を使っているが、**合併集合は一般に部分空間になるとは限らない**ので注意 !!（$W \cap W'$ は部分空間）

  [**注意**] 上で「合併集合」という言葉を使ったのは「和空間」$W + W'$ と間違えないようにするためです。集合論での「和集合」$A \cup B$ と紛らわしいので、気をつけてくださいね。

- **演習問題 1-5：**$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ の位数が分かると、$\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ の位数も分かる。行列式を返す写像

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p^\times$$

  を考えるとこれは（群の）全射準同型で $\mathrm{Ker}(\det) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ となっている。後は準同型定理から答えが求まる（代数 A の復習：分からない時は質問してください）。

- **演習問題 1-8：**hyperbolic sine / cosine は微積の復習。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

  (ii) は何れも **2 回微分すると元に戻る**＝微分写像を与える行列は **2 乗すると基本行列** I_2

- $\mathrm{Span}_F(M)$ は M が生成する F-部分空間。例えば $\mathbb{C} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1, i)$

$$\ast\ast\ast$$

いろいろな例を知ろう

次は線形写像／線形変換（但し K は体）:

- $\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = a \cdot x$（$a$ は定ベクトル）　内積の性質を使う。
- $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x) = a \times x$（$a$ は定ベクトル）　外積の性質を使う。
- $\varphi\colon\ \mathrm{Mat}_n(K) \to K, \quad \varphi(M) = \mathrm{tr}(M)$（$\mathrm{Mat}_n(K)$ は K の元を成分にもつ n 次正方行列全体）
  トレースの性質を使う。
- $\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi(x) = Mx$（$M$ は (m, n) 行列）
- $\varphi\colon\ \mathrm{Mat}_n(K) \to \mathrm{Mat}_n(K), \quad \varphi(M) = {}^tM$（${}^tM$ は M の転置 (transpose) 行列）
- $\varphi\colon\ P_n \to P_n, \quad \varphi(f) = \dfrac{d}{dx}f$（$P_n$ は x に関する K 係数の多項式で、次数が高々n のもの全体）
- $\varphi\colon\ C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$（$C[0,1]$ は区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数全体）
- $\mathbb{R}^3$ 内の点 P を平面 $\pi\colon\ ax + by + cz = 0$ に関して対称な点 $P' = TP$ に写す変換 T
- 複素共役 $\rho\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$-線形写像

次は線形写像 **ではない**

- $\varphi\colon\ \mathrm{Mat}_n(K) \to K, \quad \varphi(M) = \det(M)$（$n \geq 2$）　例えば $\varphi(2I_n) \neq 2\varphi(I_n)$
- $\varphi\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y, z) = (y + z, x - 2z + 1)$　$\varphi(0,0,0)$ は 0 ベクトルでない
- 複素共役 $\rho\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-線形写像 **ではない**

これから勉強すること

前回は演習も小テストもなく書くことがないので、これから皆さんが勉強する内容をさらっと紹介しておきましょう。

- まず前半は**加群**についての性質を学びます。今回の演習内容も含めてこれまで皆さんが扱ってきたのは、$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ など体の 線形空間でしたが、同じノリで **環上 でも線形空間と似たようなものを考える**ことにすると、少しこれまでとは違った姿が見えてきます。このようなものを **環上の加群** といいます（教科書のタイトルにもなっていますね）。例えば環であって体でない $\mathbb{Z}$（有理整数環）上の加群（$\mathbb{Z}$-加群）はとても重要な対象です。

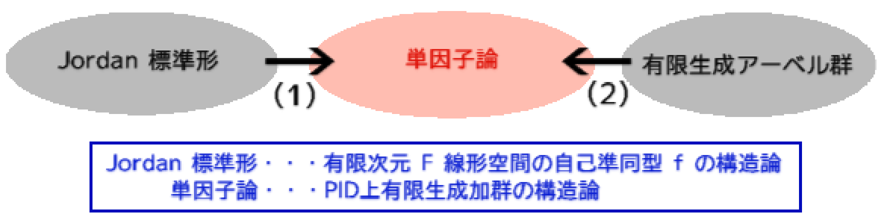
  F**-線形空間**　$\Rightarrow$　R**-加群**　　：よく似た性質をもつ

  さて「加群」とは名前の通り「群」であって、これらがどのような構造を持つかを知るのは一般には難しいのですが、実は環 R が PID（単項イデアル整域）のときは R 上の有限生成加群の構造を詳しく知ることができます。これを**単因子論**といいます。

  単因子論はそれ自体大切な理論ですが、その応用も負けず劣らず重要です。例えば F-線形空間 V に適用してみると、V 上の線形写像 $\varphi: V \to V$ の構造をわかりやすい形で記述することが出来るようになります。これを線形写像の **Jordan 標準形**と呼び、中間試験までに習うことになっていますが、これは 1 年生で習った行列の掃き出しや対角化によく似ていて、割と馴染みやすいのではないでしょうか？

  ということで、まずはこの Jordan 標準形を計算できるようになることが一つの目標になります。途中に出てくる「完全列[2]」や「有限生成アーベル群の基本定理[3]」などもしっかり押さえておきたいですね。

環上の加群の構造論：そのカンケイ



(1) $F[t]$ の作用を f を使って定める ／ **(2)** 有限生成アーベル群を自然に $\mathbb{Z}$-加群とみなす

上のようにして考えると、一見違って見える Jordan 標準形と有限生成アーベル群は、環と加群の立場から見ると「単因子論」という橋渡し役のおかげで同じものと見なせることがわかります。このようにして抽象化して考えることで全体をスッキリさせ、一気に証明出来てしまうのが代数のスバラシイ所ですね！

[2]具体的には、完全列を用いたいくつかの補題（Five Lemma や Snake Lemma など）を理解し使えるようになることです。皆さんはホモロジー群について幾何学 A で習ったと思いますが、そこで出てきた**チェイン・コンプレックス**や**マイヤー・ヴィートリス完全系列**などで少しは慣れているかもしれませんね。

[3]位相幾何学（トポロジー）の「閉曲面の分類定理」によく似ています。即ち「有限生成アーベル群の構造を決定（分類）する」定理のことです。

- 一方、後半では**テンソル積・テンソル代数**を勉強します。超カンタンに言えば

  テンソル積 $M \otimes_R N$ ＝ 2 つの R-加群 M, N を「掛けて[4]」作った新しい R-加群

  を考えるというものです。きちんとした加群を作るために定義が少々ややこしくなっており、とっつきにくいイメージがありますが、**定義よりもその性質のほうがずっと重要**です。「あ、ふつうに足したり掛けたり出来るんだ」「う〜ん、仕組みは難しいけど、計算なら出来るぞ！」という感覚が身に付けば十分 OK ですから、あまり気にせずに進むことを心掛けてください。

  ただし、テンソル代数では前半で習った完全列や直和などの記号をたくさん使いますから、忘れないようにしておいてくださいね。

[4] イメージとして「積にあたる」加群という意味で使いました。「和にあたる」直和 $M \oplus N$ と区別してこう書きます。