代数学 B・演習　おぼえ書き　その 3

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **自由加群（free module）＝「ベクトル空間に限りなく近いもの[1]」**

  自由 R-加群、直和（direct sum）と直和加群、線形独立性

- **ねじれ（torsion）にまつわるいくつかの言葉と性質**

  ねじれ元と自由元（＝ねじれ元でない元）、零化イデアル（annihilator[2]）$\mathrm{Ann}(x)$

- **（短）完全系列（(short) exact sequence）**

  Hom の諸性質、複体（complex）、完全列にまつわるいくつかの補題

前回の補足

- **演習問題 2-6：**M の元と M/N の元の区別（特にこれらの演算）に注意しましょう。良い機会なのでテキストの略解を見ながら復習してみます。

  > N の生成元を $n_1, n_2, \cdots, n_k$ とする。M/N の生成元の M における代表元を $m_1, m_2, \cdots, m_l$ とする。これら $k+l$ 個の元で生成される M の部分加群を M' とすれば、M' は有限生成である。任意の $x \in M$ を M/N で考えれば、$a_i \in R$ が存在して $\sum a_i m_i \equiv x \pmod N$。ゆえに $x - (\sum a_i m_i) \in N$ より、この元は $n_1, n_2, \cdots, n_k$ の線形結合で書ける。ゆえに $x \in M'$ となり $M = M'$。従って M は有限生成。

  上の文章を書き換えてみましょう。

  > N の生成元を $n_1, n_2, \cdots, n_k$、M/N の生成元を $\overline{m_1}, \overline{m_2}, \cdots, \overline{m_l}$ とする（これらの M における代表元が $m_1, m_2, \cdots, m_l$）。さて $n_1, \cdots, n_k, m_1, \cdots, m_l$（計 $k+l$ 個の元）で生成される M の部分加群を M' とすれば、M' は有限生成である。任意の $x \in M$ に対し、$a_i \in R$ が存在して $\sum a_i \overline{m_i} = \overline{x}$、つまり $\overline{x} - (\sum a_i \overline{m_i}) = 0$。ゆえに $x - (\sum a_i m_i) \in N$ より、この元は $n_1, n_2, \cdots, n_k$ の線形結合で書ける。ゆえに $x \in M'$ となり $M = M'$。従って M は有限生成。

  M の元 x に対し、mod N した M/N の元を $\overline{x}$ で区別しています。2 つの文章の違いをよく見比べて、しっかり区別出来るようにしましょう。

- **部分加群**の定義と意味を再確認しておきましょう（テキスト p.4）。

[1] 堀田良之著「加群十話」（朝倉書店：「かぐんとわ」＝「加群とは？」と読みます）の言い回しを拝借。この本は話し口調で語られつつも抜け目の無い詳しい解説も付いていて、私のオススメの一冊です。
[2] 発音注意！「アナイアレイター」と言います。

チェックポイント

- 今回は何と言っても**自由加群**をモノにしましょう（詳しくは No.2 を参照)。ひとつ簡単な例を挙げておきます。

  例えば、有理数体 $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Z}$-加群と見たとき、これが有限生成でないことは演習でやってもらいましたね（演習問題 2-5)。もっと話を進めると、0 以外の全ての有理数は自由元（＝ねじれ元でない）ですが、$\mathbb{Q}$ は自由 $\mathbb{Z}$-加群**ではありません。**なぜなら、任意の 2 つの有理数 $a, b \in \mathbb{Q}$ を既約分数表示して

$$a = \frac{p}{q},\ b = \frac{r}{s} \quad (p, q, r, s \in \mathbb{Z})$$

  と書くと、$(qr)a - (sp)b = 0$ となり線形従属であることが分かります。つまり、基底があるとすれば（＝ $\mathbb{Q}$ が自由 $\mathbb{Z}$-加群とすれば）その個数は 1 個しかないはずですが、全ての有理数をある 1 つの有理数の整数倍で表すことは出来ません。

  つまり $\underline{\mathbb{Q}\ \text{はねじれは無いが自由加群でない}}$ 例になっているのです。雰囲気はつかめましたか？

- **直和**記号の意味と扱いには慣れておきたいですね。

  - $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は同型 $\underline{\text{である}}$。
  - $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は同型 $\underline{\text{ではない}}$。　簡単なのでチェックしてみましょう。

- **演習問題 3-1：**ここで示す同値性は後でもう一度登場します。R-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\ f\ } M_2 \xrightarrow{\ g\ } M_3 \longrightarrow 0 \tag{1}$$

  において、R-hom. $\nu:\ M_3 \to M_2$ で $g \circ \nu = \mathrm{id}_{M_3}$ となるものが存在するとき、この完全系列は**分裂**[3]**（split）**すると言うのですが、この完全系列が分裂することと、M_1 が M_2 の直和因子であることが同値です（テキスト p.62)。

- **演習問題 3-3：**$\mathrm{Ann}(x)$ の例をひとつ。例えば $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は M 上の加群として自由加群ですが、n が合成数のときは 0 でないねじれ元が存在します。例えば $n = 12$ のときは $\mathrm{Ann}(\bar{3}) = (\bar{4})$, $\mathrm{Ann}(\bar{2}) = (\bar{6})$, $\mathrm{Ann}(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$ という感じですね。ちなみに「ねじれ」という言葉は位相幾何学の分野で、ホモロジー群のねじれ元が空間のねじれに対応していることから来ています。

- **演習問題 3-7〜3-9** は有名な補題 3 連発。順に 5 項補題（Five Lemma)、9 項（3×3）補題（Nine Lemma / 3×3 Lemma)、蛇の補題（Snake Lemma)。一番よく使う例が Snake Lemma でしょう。

$$\mathrm{Ker}\ \alpha \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Ker}\ \beta \xrightarrow{\ g\ } \mathrm{Ker}\ \gamma \xrightarrow{\ \partial\ } \mathrm{Coker}\ \alpha \xrightarrow{\ f'\ } \mathrm{Coker}\ \beta \xrightarrow{\ g'\ } \mathrm{Coker}\ \gamma \tag{2}$$

  特に Snake Lemma については問題文にある $\mathrm{Ker}\ \gamma$ から $\mathrm{Coker}\ \alpha$ への**連結準同型（connecting homomorphism）**∂（上の (2) の真ん中）の定め方がポイントであって、f, g は Ker への制限、f', g' は自然に定まる準同型となっています。

[3] これは、M_2 の R-部分加群 N_2 が存在して $M_2 = \mathrm{Ker}\ g \oplus N_2$ という形に「分裂」するという意味から来ています。

- **その他：**ある方からこのような質問を頂きました（私は服部先生から聞いたので「又聞き」なのですが $\cdots$ ）。

  問題　$G \times H \simeq G \times H'$ であって $H \simeq H'$ **でない** 例はあるか ??

  G が有限群かどうか という仮定があったかどうかを聞きそびれていたので、お答えになっているかどうか分かりませんが、もし G が無限群でも良いとすれば

  - G は $\mathbb{Z}$ の無限直和（$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots$ が可算無限個続く）
  - $H = \mathbb{Z}, H' = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

  が挙げられますね。何人か尋ねてみましたが、G を有限群として上をみたすような G, H, H' は未だ見つかっていません（無いかもしれません）。何か気付いた方がいらっしゃいましたら教えてください。

いろいろな例を知ろう

前回に引き続き、いろいろな加群を知ろうのコーナーです：

- R-加群 M が**自由 R-加群（free R-module）**であるとは、M が R のいくつかの直和と同型、即ち R 上の基底 $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在すること。この時

  $$M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R m_\lambda$$

  と書けて、M の任意の元は**有限個の** m_λ たちの R 係数の線形結合で表される。

  R が可換環の時は基底の濃度は一定。これを M の**階数（rank）**といい $\mathrm{rank}_R\, M$ で表す。

  ちなみに環上の加群において**次元**（dimension）という言葉は別の意味（難しい「代数幾何的な」意味）で使われます。

- $\mathrm{rank}_R\, M = m$ なら $M \simeq R^{\oplus m}$

- $\mathrm{Hom}_R(R^{\oplus n}, R^{\oplus m}) \simeq \mathrm{Mat}_{(m,n)}(R)$

- R を整域、M を R-加群とすると、M のねじれ元全体 $\mathrm{Tor}_R(M)$ は M の部分 R-加群。

  ちなみに $M/\mathrm{Tor}_R(M)$ は torsion-free：「ねじれ全体で割れば、ねじれが消える！」

更に R を PID（単項イデアル整域）とすることで、次のような（より強い）例が登場します。

- M を有限生成自由 R-加群（$\mathrm{rank}_R\, M = m < \infty$）、$N$ を M の部分 R-加群とすると、N は有限生成自由 R-加群で $\mathrm{rank}_R\, N \leq m$ となる。

- M を有限生成 R-加群、N を M の部分 R-加群とすると、N は有限生成 R-加群となる。

  「おぼえ書き 2」の**有限生成に関する注意書き**と比較してみましょう。因みに R: PID $\rightarrow$ R: Noether 環です。

- M を有限生成 torsion-free R-加群（m 元生成）とすると、M は有限生成自由 R-加群で $\mathrm{rank}_R\, M \leq m$ となる。

- M を有限生成 R-加群とすると $M/\mathrm{Tor}_R(M)$ は有限生成自由 R-加群であって $M \simeq \mathrm{Tor}_R(M) \oplus M/\mathrm{Tor}_R(M)$

中間試験のハイライトである**単因子論**の本質は、**PID 上の有限生成加群の構造定理**にあります。
これは任意の有限生成 R-加群 M を、ある $d_i \in R$ を使って

$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{t} R/d_iR \right) \oplus R^{\oplus r}$$

という形で（一意的に）書くことが出来る、というものです（詳しい記号の意味は次回）。
ここに登場する d_i を**単因子（elementary divisor）**と呼びます。まずはこの単因子を（具体的に）計算出来るようになることが目標です。

最後にちょっと小噺になりますが、**単因子論の応用**は「おぼえ書き 1」で紹介した Jordan 標準形だけではありません。一つ面白い例として、岩堀長慶氏による「ランプパターンの転移問題」への応用を紹介しましょう。

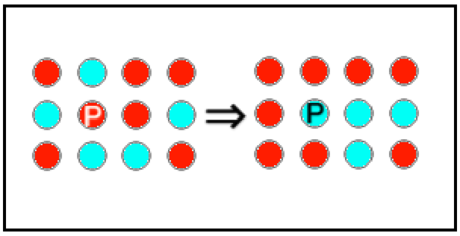

図 1：スイッチによるランプの変化（赤＝ on ／青＝ off）
同値関係をスイッチングで定める

$m \times n$ 型にランプを配置し（上は 3×4 型)、一つのランプを押すと、そのランプとその上下左右のランプの on/off が入れ替わる、という状態を考えます。例えば上の図の [P] のランプを押すと左から右のように変化しますね。そこでこのようなスイッチングによって移り合う 2 つのランプパターンを同値とみなした時、計 2^{mn} 通りのランプパターンはいくつの同値類に分かれるか？という問題です。ちなみに上のケースでは同値類はただ 1 つ、つまり全て off の状態から全てのランプパターンを作ることが出来ます。
ここでは実際に同値類の個数を求める公式を得る試みが行われるのですが、その際に単因子論が大活躍しています。こういう問題では「群の表現」や「グラフ理論」といったキーワードを思い浮かべるかもしれませんが、古典的な代数学の理論も負けず劣らず活躍しているようですね。

[参考文献]　Nagayoshi Iwahori 「Transition Problem of Lamp Patterns : An Application of the Elementary Divisor Theory」(Science reports of Tokyo Woman's Christian Univ., 1980)
※ 下線部分を「単因子論」と訳します。