代数学 B・演習　おぼえ書き　その 4

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

業務連絡

- 次回の演習は **6 月 9 日（火）**です。**来週（6 月 2 日）の演習の時間に 中間試験 が行われます。** 精一杯がんばってください。かげながら応援しております。
- 今回のプリントで中間試験の範囲は No.4 まで。No.5 にはテンソル代数の導入を書いています。講義の進捗状況を考えて早めに取り上げていますので、試験が終わってからご覧ください。
- ところで、新型インフルエンザがますます拡大しているようです。九大の HP でも注意喚起がされていますので、クラスメイトの皆さんの為にも各自で十分な対策をおねがいします。

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **単因子論**

  基本変形（elementary operation）、単因子[1]（elementary divisor）、Jordan 標準形

  正確に計算できるようになることが命です。中間試験での検討を祈ります !!

- **有限生成アーベル群の基本定理（構造定理）**

  – 任意の有限生成アーベル群 M に対し　$M \simeq \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_s\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus r}$

  ※ 記号の細かい意味についてはテキスト p.27 参照。なおテキストでは直和記号ではなく直積記号が使われています。

  $\mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/e_s\mathbb{Z}$ がねじれ部分であり、この部分が消えていれば M は $\mathbb{Z}$-自由加群であることが分かります。この定理は代数系や数論の分野では無くてはならない重要定理です。

前回の補足

- **演習問題 3-5(ii)：**f^* が全射でない例として、テキストの略解には、入射[2] $f\colon 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対し $f_{\mathbb{Z}}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ が挙げられています。これは $g\colon 2\mathbb{Z} \ni n \mapsto n/2 \in \mathbb{Z}$ という準同型写像を考えたとき、元の定義域が $2\mathbb{Z}$ である $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ には含まれますが、$n/2 \notin \mathbb{Z}$ となる n を元の定義域に含む $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ には含まれないことから分かります[3]。

  ちなみにこの問題と**演習問題 3-6(ii)** とをあわせて **Hom の 左 完全性**と言います。また、これとよく似た**テンソル積の 右 完全性**も存在します（**演習問題 5-6(ii)**：これはまた後ほど）。

[1] 正確には「PID 上の行列の単因子」です。
[2] $2\mathbb{Z}$ の上では恒等写像。
[3] もしも $f_{\mathbb{Z}}$ が全射だとすると、ある $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ が存在して $h \circ f = g$ とならなければならないが、f が自然な入射であるから h が 1/2 倍写像とならなければならず、h が $\mathbb{Z}$ 上の自己 $\mathbb{Z}$-準同型であることに矛盾。

チェックポイント

- **演習問題 4-1：**「おぼえ書き 2 & 3」で説明した事柄ですね。解く際には PID という条件をどこで使っているか確認してみましょう。ちなみにこの主張はもっと一般の環（Noether 環）でも成り立ちますから、PID であることを使わなくても証明する事が出来ます。余力のある方はチャレンジしてみてくださいね。

- **演習問題 4-2：**このプリント No.2 表面参照。**基本変形は「あわてず・あせらず」。**試験でも正確な計算を心がけたいものです。

- **演習問題 4-7：**このプリント No.2 裏面参照。

- **演習問題 4-8(5-1)：**以前紹介した **Jordan 標準形**の計算です。この計算自体は線形代数の知識だけで解くことができますから、線形代数の参考書をのぞいてみれば計算方法を知ることが出来るはずです。例えばこの講義の参考書（斎藤毅氏）p.101–103 などをご覧ください。ただこの本で理解するのは大変だと思いますので、例えば赤尾和男著「線形代数と群」（共立出版, 1998）などが手頃かもしれません。

  しかし折角単因子論を勉強したのですから、ここでは**「Jordan 標準形を求めることが何故単因子論の応用になっているのか？」**を考えてみてください。このプリント No.2〜4 も参照してくださいね。

- **演習問題 4-9(5-2)：**少し進んだ話題ですが、**Jordan 分解（Jordan decomposition）**の定義を同参考書から引用してみましょう（参考書 p.103・定義 3.4.8）。

  > **定義**　V を有限次元線形空間とし、f をその三角化可能な自己準同型とする。$V = \widetilde{V}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{a_r}$ を f に関する一般固有空間分解[4]（generalized eigenspace decomposition）とする。V の自己準同型 s で、各 $\widetilde{V}_{a_i}$ への制限が a_i 倍写像であるという条件で定まるものを、f の**半単純部分（semi-simple part）**とよぶ。$n = f - s$ を f の**巾零部分（nilpotent part）**とよび、$f = s + n$ を f の **Jordan 分解（Jordan decomposition）**とよぶ。固有値 $a_1, \cdots, a_r$ がどれも 0 でないとき、$u = s^{-1}f$ を f の**巾単部分（unipotent part）**とよび、$f = su$ を f の**乗法的な Jordan 分解**とよぶ。

  ここで「写像」として扱われているものが、演習問題では「行列」に置き換わっている（←行列の作用が写像とみなされている）ことに注意してください。ちなみに上で紹介した赤尾氏のテキスト p.35 にも載っています。

- **その他：**今回の演習で前半戦が終了しました。1 年生時代の線形代数に戻って懐かしく感じたという一方で、代数学 A（群論と環論の基礎）から少し様変わりした内容に戸惑った方も少なからずいらっしゃったかもしれません。

  今回の内容はほとんどが計算問題ですから、素直に解き方を身につけた後はひたすら練習あるのみです。意外と計算問題は高配点にもかかわらずもったいないミスをしてしまうことがよくありますので、**落ち着いて着実に**解くことを心に留めておいてください。極々基本的なことしか書いていませんが、良ければこのプリントの 2 枚目以降も参考にしてください。

  次回の演習からは再び抽象論（テンソル代数）に戻ります。息抜きはとても大事ですが、中間試験が終わっても気を抜きすぎないように注意してくださいね！

[4]参考書 p.95 参照。ここで $a_1, \cdots, a_r$ は f の固有値で、$\widetilde{V}_{a_i}$ は a_i に対する一般固有空間を表しています。

計算に慣れよう 1：単因子論とその応用

ここでは**単因子**の計算法と簡単な応用問題を紹介。しっかり復習しておきたいですね。

- **単因子**の解釈は次の 2 つが代表的です。違いをよく見比べてみましょう。
  - **解釈 1（PID 上の有限生成加群の構造）**　R を PID、M を有限生成 R-加群とする。この時ある $d_1, \cdots, d_t \in R$ と $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して
$$M \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{t} R/d_i R \right) \oplus R^{\oplus r}$$
となり、しかも $d_i \neq 0$, $d_i \notin R^{\times}$, $d_1 | \cdots | d_t$ に同伴を除き一意的にとれる。この $(d_1, \cdots, d_t)$ のことを M の **単因子**という。
  - **解釈 2（テキスト流：行列による解釈）**　R を PID とする。このとき任意の $A \in \mathrm{Mat}(m, n; R)$ に対してある $P \in \mathrm{GL}_m(R)$ と $Q \in \mathrm{GL}_n(R)$ が存在して
$$PAQ = \left(\begin{array}{cccc|ccc} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_{t'} & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right)$$
と書けて、しかも $d_i \neq 0$, $d_1 | d_2 | \cdots | d_{t'}$ で同伴を除き一意的。この $(d_1, \cdots, d_{t'})$ を A の **単因子**という。

- **基本変形**は次の 3 つ。これらをひたすら繰り返します。

  (1) **2 つの行（列）を入れかえる**

  (2) **ある行（列）を単元倍する**（例：$R = \mathbb{Z}$ では ± 1 倍、$R = \mathbb{C}[t]$ では $\mathbb{C}^{\times}$ の元をかける[5]）

  (3) **ある行（列）にある行（列）の c 倍（$c \in R$）を加える**

- ではカンタンな例をひとつ。以下は $R = \mathbb{Z}$ としたときの A の基本変形です。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 19 \\ 6 & -1 & 43 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 19 \\ -1 & 6 & 43 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ -1 & 6 & 48 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 6 & 48 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

上の 5 つの変形（矢印）は次の通り：

[1 番目]　(1 列目) と (2 列目) の入れかえ
[2 番目]　(3 列目)$-5\times$(1 列目)　[3 番目]　(2 行目)$-$(1 行目), (3 行目)$+$(1 行目)
[4 番目]　(3 行目)$-3\times$(2 行目)　[5 番目]　(3 列目)$-7\times$(2 列目)

[5] 但し 1 倍は恒等変換なので、実際の計算で使うことはないでしょう。

最後に出てきた **1,2,6** をこの整数行列の**単因子**と呼んだのでした。

もし $R = \mathbb{Q}$ ならば単位行列 I_3 まで変形出来ますね（各自チェック！）。

- さて、上のような基本変形を使って次のような問題を解いてみましょう。

問題　$\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}^{\oplus 3}$ の部分群 G を

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} y+ & 5z \\ 2x+y+ & 19z \\ 6x-y+ & 43z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\oplus 3} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

で定義するとき、剰余群 $\mathbb{Z}^{\oplus 3}/G$ の構造を決定せよ。

先ほどの計算例で出てきた行列 A を使えば

$$G = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\oplus 3} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\oplus 3} \right\}$$

と書けて、G は $\mathbb{Z}^{\oplus 3}$ の自己準同型

$$f : \mathbb{Z}^{\oplus 3} \to \mathbb{Z}^{\oplus 3}, \quad f(x) = A(x) \quad \left(x \in \mathbb{Z}^{\oplus 3}\right)$$

の像となっていることが分かります。ここで先程の計算結果から、f は $\mathbb{Z}^{\oplus 3}$ の基底の取りかえ（ベースチェンジ）によって

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 6z \end{pmatrix}$$

と表せることになります。よって

$$\mathbb{Z}^{\oplus 3}/G \simeq \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

となり、位数 2 の巡回群と位数 6 の巡回群との直和に同型となることが分かりますね。

$\ast\ast\ast$

計算に慣れよう 2：Jordan 標準形

続いて **Jordan 標準形**の計算法を紹介しましょう。Jordan 標準形の構成については、先週の講義で配られた今野先生のプリントを参照してもらうとして、ここでは具体的な行列に対して計算をしてみます。今回の**演習問題 4-8** の発表にも注目です。

とはいえ、Jordan 標準形の定義だけはここでもおさらいしておきます。$A = (a_{ij})$ を n 次の正方行列とし、変数 t を用いて

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

という行列を考えましょう（I_n は n 次単位行列）。このとき、t の多項式を成分とする上の行列 $tI_n - A$ に対し基本変形を行うことで、次のような対角行列に変形することが出来ます。

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & d_1(t) & & & \\ & & & & d_2(t) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_r(t) \end{array}\right)$$

しかも $d_i(t)$ は 1 次以上の monic[6] 多項式で $d_1(t)|d_2(t)|\cdots|d_r(t)$ と一意にとることが出来ます。さて、これら単因子たち $d_i(t)$ の計算によって Jordan 標準形の形が分かります。
まず **Jordan ブロック（Jordan block）** $J_m(\alpha)$ を m 次正方行列

$$J_m(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ & \alpha & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha & 1 \\ & & & & \alpha \end{pmatrix}$$

で定義します。今、係数体を複素数体 $\mathbb{C}$ としていたので（今野先生のプリント参照）、代数学の基本定理より $d_i(t) \in \mathbb{C}[t]$ は 1 次式の積に因数分解でき、これを $d_i(t) = (t-\beta_1)^{m_1}(t-\beta_2)^{m_2}\cdots(t-\beta_p)^{m_p}$ と書くことにしましょう。このとき $J_{m_1}(\beta_1), J_{m_2}(\beta_2), \cdots, J_{m_p}(\beta_p)$ の p 個の Jordan ブロックを作り、これを対角にならべて大きな Jordan ブロックを作ります。

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\beta_1) & & & \\ & J_{m_2}(\beta_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_p}(\beta_p) \end{pmatrix}$$

これを $d_1(t), \cdots, d_r(t)$ の計 r 個に対して行い、最後に $J_1, \cdots, J_r$ を対角にならべれば

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

という行列を得ます。これが A の **Jordan 標準形（Jordan canonical form）** です。

[6] 最高次の係数が 1。

ここで一点だけ補足。今野先生のプリント[7]での「$\mathbb{C}[t]$-加群 $\mathbb{C}^n$ の単因子が Jordan ブロックに相当する」という内容と、上で紹介した「$tI_n - A$ の単因子が Jordan ブロックに相当する」という内容には少しだけギャップがあります。なぜ $tI_n - A$ の単因子を求めると $\mathbb{C}[t]$-加群 $\mathbb{C}^n$ の単因子が分かるのかというと、これは**「Coker $(tI_n - A:\ \mathbb{C}[t]^n \to \mathbb{C}[t]^n)$ が $\mathbb{C}[t]$-加群 $\mathbb{C}^n$ と同型である[8]」**ことが理由になっています。余力のある方は少し考えてみてくださいね。

- **例題 1**　次の Jordan 標準形を求めてみましょう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$$

さて、上の行列 A に対して

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & -3 & 2 \\ 3 & t-13 & 7 \\ 5 & -19 & t+10 \end{pmatrix}$$

を考えます。では、この行列を基本変形してみましょう。

$$\begin{pmatrix} t-1 & -3 & 2 \\ 3 & t-13 & 7 \\ 5 & -19 & t+10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ 3 & t+1 & 7 \\ 5 & 2t+1 & t+10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 2 \\ 3 & t+1 & 7 \\ -1 & -1 & t-4 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -t^2+4 & t+1 & -2t+5 \\ t-2 & -1 & t-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -t^2+4 & 0 & -2t+5 \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2t+5 & -t^2+4 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^2+2t \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t-2 & (t-1)^2(t-2) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (t-1)^2(t-2) \end{pmatrix}$$

[1 番目]　(2 列目)+2×(3 列目)
[2 番目]　(3 行目)−2×(2 行目)
[3 番目]　(1 列目)−$(t-1)$×(2 列目), (3 列目)−2×(2 列目)
[4 番目]　(2 行目)−$(t+1)$×(1 行目), (3 行目)+(1 行目)
[5 番目]　(1 列目) と (2 列目) の入れかえ, (2 列目) と (3 列目) の入れかえ
[6 番目]　(2 行目)+2×(3 行目)
[7 番目]　(3 列目)+(t^2-2t)×(2 列目)
[8 番目]　(3 行目)−$(t-2)$×(2 行目)

結果はただ一つですが、基本変形の手順は一通りではありませんので、必ず自分で計算してみてください。以上より、単因子は $d_1(t) = (t-1)^2(t-2)$ の 1 つだけで A の Jordan 標準形は

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となりました。

[7] 今野先生のプリントでは変数が X になっていますが、ここでは t で揃えて書いています。
[8] この主張を示すにはいくつか方法があります。例えば 1) $\mathbb{C}[t]$-加群 $\mathbb{C}^n$ の単因子から Jordan ブロックを作ると、$J_m(\alpha)$ について $tI_m - J_m(\alpha)$ の単因子が $1, 1, \cdots, 1, (t-\alpha)^m$ であることから従う。2) $\mathbb{C}[t]^n \to \mathbb{C}^n:\ e_i' \mapsto e_i$（$\{e_i'\}$ と $\{e_i\}$ はそれぞれの標準基底）は $\mathbb{C}[t]$-加群の全射を定め、この全射によって $0 \to \mathbb{C}[t]^n \to \mathbb{C}[t]^n \to \mathbb{C}^n \to 0$ が完全系列となることから従う（但し 2 番目の map は $(tI_n - A)$ 倍写像）。

- **例題 2**　それではもう一問。

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

例題 1 と同様にして $tI_3 - B$ を基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & (t-1)^2 \end{pmatrix}$$

となります。これにより、単因子は $d_1(t) = t-1$ と $d_2(t) = (t-1)^2$ の 2 つであって、B の Jordan 標準形は

$$J_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となりました。

- 検算してみたい方は **Mathematica** を使ってみましょう。

```
a = { { -1, -2, 6 }, { -1, 0, 3 }, { -1, -1, 4 } };
jv = JordanDecomposition[a];
s = jv[[1]];
Inverse[s].a.s
Out:  { { 1, 0, 0 }, { 0, 1, 1 }, { 0, 0, 1 } }
```

- **練習問題**　演習問題 4-8 だけでは飽き足らない方のためにエクササイズを用意してみました。

1. 行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $J_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ であることを確かめよ。

2. 行列 $D = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ に対し $J_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ であることを確かめよ。

3. 余力のある方へ　α, β, γ を異なる複素数とする。3×3 型の Jordan 標準形は

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

の 6 種類で尽きることを確かめよ。また 4×4 型の場合はどうか。

おぼえ書き その 1〜その 4　チェック問題

中間試験の範囲でこれまで学んだことのチェックが出来るように、少しばかり問題を用意してみました。これらは全て 最低限身についていてほしい内容 ですから、ちょっと自信が無いという方はよく復習しておいてください。

＊＊＊

- **問題 0** (Warming Up)　集合 X から環 R への写像全体の集合 $\mathrm{Map}(X,R)$ は値の演算（つまり R の演算）による「和」$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ と「積」$(fg)(x) := f(x)g(x)$ により環をなす。以下はこの左分配律 $f(g+h) = fg+fh$ の証明である。証明中の等号 $=_1$〜$=_5$ は選択肢 (a)〜(f) のうちのどれを使っているか答えよ。
  - **証明**　$^\forall f,g,h \in \mathrm{Map}(X,R)$ をとる。$^\forall x \in X$ に対し
$$\begin{aligned}(f(g+h))(x) &=_1 f(x)(g+h)(x)\\ &=_2 f(x)(g(x)+h(x))\\ &=_3 f(x)g(x)+f(x)h(x)\\ &=_4 (fg)(x)+(fh)(x)\\ &=_5 (fg+fh)(x)\end{aligned}$$
  よって $f(g+h) = fg+fh$ が示された。
  - **選択肢**
  (a) $\mathrm{Map}(X,R)$ の和の定義　(b) $\mathrm{Map}(X,R)$ の積の定義
  (c) R の左分配律　(d) R の乗法の結合律　(e) R の加法の可換性　(f) その他

- **問題 1**　R, S を環とする。左 R 右 S-加群 M と左 R-加群 N に対し、左 R-準同型全体 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ は値の演算（つまり N の演算）によって加法群をなす（これは認めてよい）。さらに
$$f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\ s \in S \text{ に対し } (s\cdot f)(x) = f(x\cdot s)\ (^\forall x \in M)$$
によって $s\cdot f:\ M \to N$ を定義する。
  1. $s\cdot f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ となることを示せ。
  2. 上の事実から $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ が左 S-加群をなすことを示せ。
  3. N が両側 (R,S)-加群の場合はどうなるか考察せよ。

- **問題 2**　次の行列 $A \in \mathrm{Mat}(3,4;\mathbb{Z})$ が定める $\mathbb{Z}$-準同型 $f_A:\ \mathbb{Z}^{\oplus 4} \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{Z}^{\oplus 3}$ を考える。
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 7\\ 4 & 13 & 13 & 5\\ 5 & 14 & 11 & 19\end{pmatrix}$$
  1. $\mathbb{Z}$ での基本変形を行い、A の単因子を求めよ。
  2. Coker f_A はどのような巡回 $\mathbb{Z}$-加群の直和と同型になるか調べよ。

- **問題 3**　次の行列の Jordan 標準形を求めよ。
$$M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ -4 & 7 & 4\end{pmatrix}$$

＜略解＞　問題 0 & 1：略　問題 2：単因子は 1,3,6 で Coker $f_A \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$　問題 3：$J_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

テンソル代数へのイントロダクション

これから先は定期試験（期末試験）の範囲です。後で読んでみてくださいね。

これまで**環上の加群**について勉強してきましたが、いよいよこれらを手足のように扱う時がやってきました。漠然とした不安を抱えている方のために、少しお話ししておきたいと思います。

R を unital な可換環[9]とし、2 つの R-加群 M, N を考えたとき、この 2 つを使って**テンソル積（tensor product）** $M \otimes_R N$ というものが定義出来ます。これは

$$\left\{ \sum_{\text{有限和}} m \otimes_R n \ \middle| \ m \in M,\ n \in N \right\}$$

という形をした集合であって、$r, s \in R$ に対して

- $(rm_1 + sm_2) \otimes_R n = r(m_1 \otimes_R n) + s(m_2 \otimes_R n)$
- $m \otimes_R (rn_1 + sn_2) = r(m \otimes_R n_1) + s(m \otimes_R n_2)$
- $r(m \otimes_R n) = (rm) \otimes_R n = m \otimes_R (rn)$

という性質を持ったものです。この零元は $0_M \otimes_R 0_N$ で、$0_M \otimes_R n = m \otimes_R 0_N = 0$ となることも定義からすぐ分かります。
加群のテンソル積を定義するためには、いわゆる**「普遍性[10]」（universal property）**が中心的役割を果たすのですが、テキストを見てもらうと分かるとおり**ちょっと複雑**[11]で、初学者にとってとっつきにくいイメージを与えることが多いようです。しかしながら、普遍性は抽象代数においては良く使われる重要な概念です。

さて、R を部分環にもつ可換環 $B \supset R$ を持って来ます。この B を R-加群とみなして、同じく R-加群の構造を持つ M とのテンソル積 $B \otimes_R M$ を作ります。するとこれは、M に作用する元の出所を R から B に**「増やした」**ことになっていますね。これを**係数拡大（scalar extension）**と言います（具体的な係数拡大の例はまた後ほど）。
ではこのようなことを考えて何がウレシイのかというと、例えば $\mathbb{Z}$-加群 M を、$\mathbb{Z}$ を含むような体 K（例えば $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{R}$）に係数拡大してやれば、$K \otimes_{\mathbb{Z}} M$ は K-加群、つまり **K-ベクトル空間 に変身**してしまいます。**「テンソル積をとることでねじれが消えてしまう」**のです !!
特に M が有限生成であれば $K \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq K^n$ という同型が得られ、しかもこの n は M に含まれる $\mathbb{Z}$ の個数（$= \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, M$）に一致しています。

少しだけ序盤の内容をかじってみましたが、ボンヤリとしか掴めていない方も気にする必要はありません。とにかくテンソル積は**定義よりも性質、そして道具として使えるようになること**が大切です。演習の時間を活用して、少しずつ自分のモノにしていきましょう。

[9] ここでは簡単のため可換を仮定しましたが、実際には定義を適当に修正することで非可換環上でもテンソル積を定義することができます。おそらく次回の「おぼえ書き 5」でちょこっと説明します。
[10] 詳細はテキスト p.36 をご覧ください。
[11] 私個人の感想です。パッと見てスラッと分かるという方は褒めて差し上げますが、多分私と同じ意見の方が多いのではないでしょうか ??