代数学 B・演習　おぼえ書き　その 5

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

中間試験＆九重研修おつかれさまでした。後半戦もがんばっていきましょう !!

今日の演習内容（＝前回までの講義内容）

- **テンソル積の定義とその性質**

  R-双線形写像、テンソル積の構成と一意性、普遍性（universality/universal property）、写像のテンソル積、平坦性（flatness）、係数拡大（scalar extension）

  第 1 章から随分様変わりしたように見えるかもしれませんが、ちゃんとつながっています。加群の章で勉強したことは忘れないように注意してくださいね！

テンソル積って何？

テンソルの章に入ってすでに 3 週経ちましたが、そもそもテンソル積というものはどんな量なのか、そのイメージがなかなか掴みづらいという方もいらっしゃるのではないでしょうか。私はテンソルを正規の講義では習わなかった（つまり独学です）ので、最初は理解に苦しんだ思い出があります。今回はテンソルを扱う最初の演習ですので、少しだけお話をしてみたいと思います。きちんと理解されている方には退屈だと思いますので、ここは読み飛ばして下さって結構です。

さて、突然ですが次のようなシチュエーションを考えてみてください。

- 数学科の友達同士で旅行に行くことにしましょう。
- 参加人数を v 人、泊数を w 泊として、
- かかった宿泊費を $S(v,w)$ で表すことにします。

ここで、泊まるホテルは 1 人 1 泊一律税込 1 万円という（ちょっと高めですが）明朗会計であると仮定します。つまり、人数や泊数を増減させたときに宿泊費が

- $S(v_1+v_2,w)=S(v_1,w)+S(v_2,w)$
- $S(v,w_1+w_2)=S(v,w_1)+S(v,w_2)$
- $S(\lambda v,w)=S(v,\lambda w)=\lambda S(v,w)$

という規則で増減すると考えるのです。たとえば 1 つめの式は、$20+40=60$ 人で w 泊するには、20 人で w 泊した時の宿泊費と 40 人で w 泊した時の宿泊費とを足した分だけかかりますよ、という意味です。以下同様にしてこのような解釈が出来る時、上の S を双線形（bilinear）と呼んだのでした。線形な場合では現実とは違って、ツインやトリプルにして安く済ませたり、浮いたお金でスイートルームにしたりすることは考えてはいけないのです。

では、肝心のテンソルの話をしましょう。上の例を考えてみると、2 人で 6 泊するのと、4 人で 3 泊するのとでは、かかったお金だけ見れば同じですよね。とすれば、人数と泊数とをテンソル積した「新しい量」を定義して

$$1\text{ 人}\otimes 12\text{ 泊} = 2\text{ 人}\otimes 6\text{ 泊} = 3\text{ 人}\otimes 4\text{ 泊} = 4\text{ 人}\otimes 3\text{ 泊} = 6\text{ 人}\otimes 2\text{ 泊} = 12\text{ 人}\otimes 1\text{ 泊}$$

という等価な関係（スカラ倍が移りあう）を与えることはとっても自然に思えませんか ??
つまり宿泊費だけに興味があるとすれば、2 人で 6 泊したとか、4 人で 3 泊したというような detail はどうでもよく、単に $v\otimes w = 12$（人泊[1]）という量だけが分かればそれでオッケーなのです。

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V\otimes W \arrow[d, "f"] \\
& S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{\cdots,(2\text{ 人},6\text{ 泊}),(3\text{ 人},4\text{ 泊}),\cdots\} \arrow[r] \arrow[dr, "\text{フロント}"'] & 12\text{ 人}\otimes\text{泊} \arrow[d, "\times 1\text{ 万}"] \\
& 12\text{ 万円}
\end{tikzcd}$$

現実では、ホテルのフロントに「3 名で 4 泊おねがいします」と言えば即座に「12 万円になります」と返ってきます（つまり $\varphi\colon V\times W\to S$ という対応がなされます）が、数学的には必ず人数と泊数のテンソル積 $V\otimes W$ を経由することが出来て、しかもそのルートは一意的に定まります。これを**テンソル積の普遍性**と言ったのでした。

以上で、テンソル積は単なる直積とは違うものだということ、そして必要な情報を抜き出してわかりやすく表示したものだということがお分かり頂けたでしょうか ?? これから色々な問題を解く際には、このようなイメージを頭の片すみに思い浮かべながら取り組んでみてくださいね。

$***$

テンソル積の定義（General Ver.）

- テキストでは R を可換環としていますが、可換性を仮定せずに定義を述べてみましょう（テキスト p.47：注意 2.2.10)。今はまだ可換環で手一杯という方は「テンソル積の性質」の部分だけでもご覧ください。
- **準双線形写像（バランス写像）：** M を右R-加群、N を左R-加群、P を加法群（つまり $\mathbb{Z}$-加群：テキストではアーベル群で統一）とし、写像 $f\colon M\times N\to P$ が次をみたしているとする。
  - $^\forall m\in M$: fix で N に対し線形（$^\forall n_1,n_2\in N$: $f(m,n_1+n_2)=f(m,n_1)+f(m,n_2)$）
  - $^\forall n\in N$: fix で M に対し線形（$^\forall m_1,m_2\in M$: $f(m_1+m_2,n)=f(m_1,n)+f(m_2,n)$）
  - $^\forall m\in M$, $^\forall n\in N$, $^\forall r\in R$ に対し $f(m\cdot r,n)=f(m,r\cdot n)$

  この f を R-**準双線形写像**（R **quasi-bilinear mapping**）または R-**バランス写像**（R-**balanced mapping**）という。
- **テンソル積：**上の M,N に対し、次で特徴付けられる $\mathbb{Z}$-加群 $M\otimes_R N$ と R-準双線形写像 $t\colon M\times N\to M\otimes_R N$ とが、標準的同型を除き一意に定まる。
  - $^\forall P$: $\mathbb{Z}$-加群、$^\forall f\colon M\times N\to P$: R-準双線形写像に対し $F\colon M\otimes_R N\to P$: $\mathbb{Z}$-準同型で $f=F\circ t$ となるものがただ 1 つ存在する

  この $M\otimes_R N$ を M と N の R 上の**テンソル積**（**tensor product**）とよぶ。なお $t(m,n)=: m\otimes_R n$ とする。

[1] 勿論こんな単位は存在しません。イメージをつかんでくださいね。

- **テンソル積の性質**をいくつか：
  - M を 左S_1右R-加群、N を 左R右S_2-加群のとき、$M \otimes_R N$ は自然に 左S_1右S_2-加群。
  - R を 両側R-加群とみなせば、自然に左 R-加群として $R \otimes_R N \simeq N$
  - R が可換ならば、R 加群 M, N に対し $M \otimes_R N$ は自然に R-加群。
  - $f\colon\ M \to M',\ g\colon\ N \to N'$ に対して $f \otimes g\colon\ M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ が定まる。
  - $M \otimes_R N \simeq N \otimes_{R^{\mathrm{op}}} M$ で、特に R が可換ならば $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$
  - M を 右R-加群、N を 左R右S-加群、P を 左S-加群として $(M \otimes_R N) \otimes_S P \simeq M \otimes_R (N \otimes_S P)$

チェックポイント

- **演習問題 5-4：**忘れてしまった方のために**分数体**または**商体**の定義を確認しておきましょう。

  整数の割り算を考えて有理数を作る、つまり $\mathbb{Z}$ の商を考えて $\mathbb{Q}$ を構成したように、一般の整域 R に対しても「分数の」体を作ることが出来ます。まず形式的な商の全体

  $$K = \left\{ \frac{y}{x} \mid\ x, y \in R,\ x \neq 0 \right\}$$

  を考えて、K で 2 つの元が等しいことを

  $$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} \Leftrightarrow R \text{ で } xy' - yx' = 0$$

  と定義すれば、加法・乗法を

  $$\frac{y}{x} + \frac{y'}{x'} = \frac{xy' + yx'}{xx'},\quad \frac{y}{x} \cdot \frac{y'}{x'} = \frac{yy'}{xx'}$$

  と矛盾無く定義できます。このとき $x \in R$ を $(x/1) \in K$ と同一視して $R \subset K$ と考えることができ、K は単位元が 1 で、$y/x \neq 0$ の逆元が x/y であるような体となります。こうして出来た K を R の**商体（quotient field）**または**分数体（field of fractions）**と呼びます。

  例えば $\mathbb{Z}$ の分数体は $\mathbb{Q}$ です。また体 K 上の一変数多項式環 $K[X]$ の商体は K を係数にもつ一変数有理式全体に一致し、これを K 上の一変数**有理関数体**といい $K(X)$ と書きます。有理関数体についてのもっと進んだ話題は代数学 C（体と Galois 理論）で扱いますが、代数学 C を履修しないという方も名前くらいは知っておくと良いでしょう。

- **演習問題 5-6(ii)：**これを**テンソル積の 右 完全性**といいます。$f \otimes \mathrm{id}_N$ が単射でなくなる例は、以前 Hom の 左 完全性をやったときに使った反例がヒントです。そういえば 6/2 の講義でもちょっと出てきましたね（ノートを見てみましょう）。

- **演習問題 5-7(i)：**双対空間（dual space）$V^* := \mathrm{Hom}_F(V, F)$ の定義を再確認。自然な同型 $\varphi\colon\ V^* \otimes_F W \to \mathrm{Hom}_F(V, W)$ を作れという問題でした。ここでは $V^* \times W \ni (f, w)$ に対して

  $$F_{f,w}(v) = f(v)w \quad (v \in V)$$

  によって $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ の元 $F_{f,w}$ を定義できますね（チェック！）。この対応 $f \otimes w \leftrightarrow F_{f,w}$ によって $V^* \otimes_F W \simeq \mathrm{Hom}_F(V, W)$ となるのです。特にこういった問題では**「どこからどこへの Hom なのか」**をきちんと把握していないと混乱するので慎重にいきましょう。

- **演習問題 5-7(ii)：**特に $V = W$ なので $\mathrm{Hom}_F(V, V) \simeq V^* \otimes_F V$

  従って V の線形変換は **1 階反変 1 階共変テンソル**とみなせます。詳細はまた次回。

- **演習問題 5-8：5-7** とセットになっています。双対空間と双対基底（dual basis）はこのような純粋代数学でも使いますが、表舞台では微分幾何学（例えばリーマン幾何学）などでよく使われていたように記憶しています。

いろいろな例を知ろう

今回は双線形写像・テンソル積の例をいくつか見ていきましょう：

- **双線形写像の例：**
  - 体の乗法 $\cdot\colon K \times K \to K$ は K-双線形。
  - V を K-線形空間とすると、スカラ倍 $\cdot\colon K \times V \to V$ は K-双線形。
  - 行列とベクトルの積 $\cdot\colon \mathrm{Mat}_n(K) \times K^n \to K^n$ は K-双線形。
  - 行列の積 $\cdot\colon \mathrm{Mat}(l,m;K) \times \mathrm{Mat}(m,n;K) \to \mathrm{Mat}(l,n;K)$ は K-双線形。
  - V, W, V', V'' を K-線形空間とする。写像 $f\colon V \times W \to V'$ が K-双線形で $g\colon V' \to V''$ が K-線形写像ならば、合成 $g \circ f\colon V \times W \to V''$ は K-双線形。
  - V, W を K-線形空間とし、写像 $F\colon V \times \mathrm{Hom}(V,W) \to W$ を $F(x,f) = f(x)$ で定めれば、F は K-双線形。

- **テンソル積の例：**
  - $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ は 1 次元 $\mathbb{C}$-線形空間。つまり $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$
  - $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ は 4 次元 $\mathbb{R}$-線形空間。つまり $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^{\oplus 4}$
  - $\sqrt{-1} \otimes_{\mathbb{C}} \sqrt{-1} = -1 \otimes_{\mathbb{C}} 1$ であるが $\sqrt{-1} \otimes_{\mathbb{R}} \sqrt{-1} \neq -1 \otimes_{\mathbb{R}} 1$
  - $\{e_1, e_2\}$ を $\mathbb{R}^2$ の標準基底[2]（standard basis）とすると、例えば ${}^t(1,2) \otimes {}^t(3,4) \in \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ の基底 $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$ を使って
  $$\begin{aligned} {}^t(1,2) \otimes {}^t(3,4) &= (e_1 + 2e_2) \otimes (3e_1 + 4e_2) \\ &= 3e_1 \otimes e_1 + 4e_1 \otimes e_2 + 6e_2 \otimes e_1 + 8e_2 \otimes e_2 \end{aligned}$$
  と書ける。
  - $d = \mathrm{GCD}(m,n)$ とすると $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$
  つまり m と n が互いに素ならば $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$
  - M を $\mathbb{Z}$-加群とすると、$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間。
  - 上において $M \simeq \mathbb{Z}^n$ ならば $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^n$ であるが $M \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ならば $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$
  もっと一般に M がねじれ $\mathbb{Z}$-加群ならば $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$
  - $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$
  - 多項式環のテンソル積： $R[X] \otimes_R R[Y] \simeq R[X,Y]$
  - 行列環のテンソル積： $\mathrm{Mat}_m(R) \otimes_R \mathrm{Mat}_n(R) \simeq \mathrm{Mat}_{mn}(R)$
  - R を体、$A \in \mathrm{Mat}_m(R)$, $B \in \mathrm{Mat}_n(R)$ に対して $\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$
  略証）$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B)$ ゆえ $\det(A \otimes B) = \det(A \otimes I_n) \cdot \det(I_m \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$ となります。テキストでは Kronecker product と呼んでいるようです。
  - 有理数体 $\mathbb{Q}$ の乗法群 $\mathbb{Q}^{\times}$ を $\mathbb{Z}$-加群とみなすと、$\mathbb{Q}^{\times} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は無限次元 $\mathbb{Q}$-ベクトル空間。
  - 環の準同型 $A \to B$ が与えられたとき、テンソル積によって A-加群から B-加群を作ることが出来る。A-加群 M に対し、$B \otimes_A M$ に $b(b' \otimes m) = (bb') \otimes m$ と定めれば $B \otimes_A M$ は B-加群の構造をもつ。これを**係数拡大**（scalar extension）という。

[2] つまり $e_1 = {}^t(1,0)$, $e_2 = {}^t(0,1)$ ということです。

- **テンソル積の例（続き）**

  - 係数拡大の例：前ページの $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ なども一つの例。他にも
    - $B \otimes_A A[X] \simeq B[X]$ （多項式環の係数が拡大）
    - $B \otimes_A \mathrm{Mat}_n(A) \simeq \mathrm{Mat}_n(B)$ （行列環の係数が拡大）
  - p, q を素数とし、$\mathbb{Z}_{(q)}$ を $\mathbb{Z}$ の素イデアル (q) における**局所化**[3]（localization）、即ち

$$\mathbb{Z}_{(q)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \ a, b \in \mathbb{Z},\ q \nmid b \right\}$$

  とする。このとき

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(q)} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & (p = q) \end{cases}$$

  - A-加群 M と A の積閉[4]集合 S に対して $S^{-1}M \simeq S^{-1}A \otimes_A M$
  - 局所化と $\otimes$ の可換性：A-加群 M, N に対し $S^{-1}(M \otimes_A N) \simeq S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N$
  - 極大イデアルをただ 1 つもつ環を**局所環**（local ring）という。素数 p に対して

$$A = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid \ (m, p) = 1 \right\}$$

  とおけば A は

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid (m, p) = 1,\ p|n \right\}$$

  を極大イデアルとする局所環となる。このとき $M = \mathbb{Q}/A$ とおけば $M \otimes_A (A/\mathcal{M}) = 0$
  - L が局所環で M, N を有限生成 L-加群とする。このとき $M \otimes_L N = 0$ ならば $M = 0$ または $N = 0$
  - 体 K 上のベクトル空間 E と K の任意の拡大体[5]L に対して L 上のベクトル空間 $E \otimes_K L$ を定義出来る。特に $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ のときこれを**複素化**（complexification）という。
  - R を可換環とし、M, N が共に自由 R-加群

$$M = \bigoplus_i Re_i, \quad N = \bigoplus_j Rf_j$$

  ならば

$$M \otimes_R N \simeq \bigoplus_{i,j} R(e_i \otimes f_j)$$

  は $\{e_i \otimes f_j\}$ を基底とする自由 R-加群。R が体ならばこれがベクトル空間のテンソル積。
  - $\mathbb{R}$-代数[6]$A = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の 2 つの元

$$e_1 = \frac{1 \otimes 1 + \sqrt{-1} \otimes \sqrt{-1}}{2}, \quad e_2 = \frac{1 \otimes 1 - \sqrt{-1} \otimes \sqrt{-1}}{2}$$

  に対し $e_1 + e_2 = 1 \otimes 1$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$ が成り立つ。
  ※ 余力のある方へ： このとき $\mathbb{R}$-代数の準同型 $f: \ \mathbb{R}[X, Y] \to A$ であって $f(X) = \sqrt{-1} \otimes 1$, $f(Y) = 1 \otimes \sqrt{-1}$ をみたすものが unique に定まる。この核 $\mathrm{Ker}\ f$ は何か？ また Ae_1 を自然に $\mathbb{R}$-代数とみなしたとき、$\mathbb{C}$ から Ae_1 への（$\mathbb{R}$-代数としての）同型写像はどのようなものか？

---

[3] 代数学 A：演習問題 10-10 参照。
[4] **積閉**（multiplicatively closed）の定義については代数学 A：演習問題 10-5 参照。
[5] 代数学 C でやります。とりあえずは「K を含んだもっと大きな体」だと思ってください。
[6] R 上の多項式環 $R[X_1, \cdots, X_n]$ のように、両立する環構造をもつ R-加群のことを R-**代数**（R-algebra）といいます。環 R' に R-代数の構造を入れることは、環の準同型 $R \to R'$ を与えることと等価です。

No.4：公式集の補足

今回のおぼえ書きプリント No.4 に、テンソル積・テンソル代数にまつわる「公式（？）」をまとめてみました。一々テキストを引くのが面倒くさいという方、どうぞご活用ください。
但し整理の関係上いくつか書ききれなかったことがありますので、ここで補足しておきます。

- 記法はテキストに従いましたが、**p.43–44 の（IV）と p.45 の系 2.2.1 は「文字通り読むと」誤りです。** そもそも $N \supset N'$ が R-部分加群であったとしても $M \otimes_R N \supset M \otimes_R N'$ は R-部分加群かどうかは分かりません。これについては服部先生からも補足があると思いますので、適宜修正・コメントを加えておいてください。

- R のイデアル I, J に対し $(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I+J)$

  これの特別なケースが先ほど紹介した $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ですね。

- M が R 上 平坦 とは、任意の完全列 $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ に対し次が完全：

$$0 \to M \otimes_R N_1 \to M \otimes_R N_2 \to M \otimes_R N_3 \to 0$$

  例えば環 M の局所化 $S^{-1}M$ は M に関して平坦になっています。また、任意の自由 R-加群は平坦 R-加群となります。

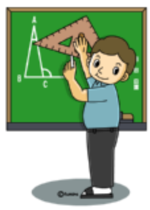
  それからこの逆も成り立つとき、即ち系列 (A)：$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ に対して系列 (B)：$0 \to M \otimes_R N_1 \to M \otimes_R N_2 \to M \otimes_R N_3 \to 0$ を考えた際、任意の系列 (A) に対して (B) が完全ならば (A) も完全である とき、M は R 上**忠実平坦**（faithfully flat）であると言います。

- 講義ではスキップしましたが、平坦性について次が成り立ちます。

  命題　R を整域とすると M が平坦ならば M は torsion-free。更に R が PID なら逆も成り立つ。

- 最後の**射影加群**（projective module）まで書こうと思ったのですが、余白が狭すぎました。

  というのは冗談で、少し言葉の準備が大変なので省略しました。関手 Ext と Tor についても同様です。これらについてはまた後日取り上げます。



保存版　公式大集合

R は unital な可換環とする。また、断り無く使われた M, N 等の記号はすべて R-加群を表す。

- 定義から：
  - $(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$ $(x_1, x_2 \in M,\ y \in N)$
  - $x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$ $(x \in M,\ y_1, y_2 \in N)$
  - $(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y)$ $(\lambda \in R,\ x \in M,\ y \in N)$
- 写像のテンソル積は $f_1 \colon M_1 \to N_1,\ f_2 \colon M_2 \to N_2$ に対し
$$f_1 \otimes f_2 \colon M_1 \otimes_R M_2 \to N_1 \otimes_R N_2$$
で $(f_1 \otimes f_2)(x_1 \otimes x_2) = f_1(x_1) \otimes f_2(x_2)$ $(x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2)$ と定義される。
- $M \otimes_R R \simeq M, \quad M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$
- $(M_1 \oplus M_2) \otimes_R N \simeq (M_1 \otimes_R N) \oplus (M_2 \otimes_R N)$
- $M \supset M_1,\ N \supset N_1$ を R-部分加群とし、$\pi \colon M \to M/M_1,\ \rho \colon N \to N/N_1$ を標準的 R-準同型とすると
$$\pi \otimes \rho \colon M \otimes_R N \to (M/M_1) \otimes_R (N/N_1)$$
は全射準同型であって次をみたす：
$$\mathrm{Ker}(\pi \otimes \rho) = M \otimes N_1 + M_1 \otimes N$$
特に $M \otimes N/(M \otimes N_1 + M_1 \otimes N) \simeq (M/M_1) \otimes (N/N_1)$ がなりたつ。
- 上の記号の下に $M \otimes_R (N/N_1) = (M \otimes_R N)/(M \otimes_R N_1)$
- R のイデアル I, J に対し $(R/I) \otimes_R (R/J) \simeq R/(I + J)$
- M が R 上 平坦 とは、任意の完全列 $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ に対し次が完全：
$$0 \to M \otimes_R N_1 \to M \otimes_R N_2 \to M \otimes_R N_3 \to 0$$

これ以降は断らない限り R は体、M を R-ベクトル空間とする。また $\dim_R M = n$（有限次元）とし、M の双対空間を $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ で表す。

- r 階反変テンソル空間：$T^r(M) = M \otimes_R M \otimes_R \cdots \otimes_R M$（$r$ 個のテンソル積）
但し $r = 0$ の時は $T^0(M) = R$ で定義。なお $\dim_R T^r(M) = n^r$
- s 階共変テンソル空間：$T_s(M) = M^* \otimes_R M^* \otimes_R \cdots \otimes_R M^*$（$s$ 個のテンソル積）
但し $s = 0$ の時は $T_0(M) = R$ で定義。なお $\dim_R T_s(M) = n^s$
- r 階反変 s 階共変（混合）テンソル空間：$T^r_s(M) = M \otimes_R \cdots \otimes_R M \otimes_R M^* \otimes_R \cdots \otimes_R M^*$
（M を r 個と M^* を s 個）なお $\dim_R T^r_s(M) = n^{r+s}$
- M 上のテンソル代数：但し　$T^0_0(M) = R, \quad T^r_0(M) = T^r(M), \quad T^0_s(M) = T_s(M)$
$$T^*(M) = R \oplus \sum_{r=1}^{\infty} T^r(M), \quad T_*(M) = R \oplus \sum_{s=1}^{\infty} T_s(M), \quad T(M) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} T^r_s(M)$$
和は R-加群として、積は $\otimes$ で与えられる。順に反変代数、共変代数、混合代数。

- 対称テンソル： $S^r(M) = \{x \in T^r(M) \mid$ 任意の $\sigma \in S_r$ に対し $\sigma x = x\}$
- 交代テンソル： $\bigwedge^r(M) = \{x \in T^r(M) \mid$ 任意の $\sigma \in S_r$ に対し $\sigma x = (\mathrm{sgn}\sigma)x\}$
  但し $S^0(M) = \bigwedge^0(M) = R$ とする。
- $\mathcal{S}'^{(r)} = \sum_{\sigma \in S_r} \sigma, \quad \mathcal{A}'^{(r)} = \sum_{\sigma \in S_r} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma$ 　は次の性質をもつ：

  $\sigma \circ \mathcal{S}' = \mathcal{S}' \circ \sigma = \mathcal{S}', \quad \sigma \circ \mathcal{A}' = \mathcal{A}' \circ \sigma = (\mathrm{sgn}\sigma)\mathcal{A}', \quad \mathcal{S}'^2 = r!\mathcal{S}',\ \mathcal{A}'^2 = r!\mathcal{A}'$
  $r \geq 2$ のとき $\mathcal{A}' \circ \mathcal{S}' = \mathcal{S}' \circ \mathcal{A}' = 0$

更にこれ以降 $\mathrm{char}(R) = 0$ を仮定する。

- $T^r(M)$ における対称化作用素 $\mathcal{S}^{(r)} = \dfrac{1}{r!}\mathcal{S}'^{(r)}$ と交代化作用素 $\mathcal{A}^{(r)} = \dfrac{1}{r!}\mathcal{A}'^{(r)}$
  但し $\mathcal{S}^{(1)} = \mathrm{id},\ \mathcal{A}^{(1)} = \mathrm{id}$ とする。
- 作用素の性質： $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S},\ \mathcal{A}^2 = \mathcal{A},\ \mathcal{S} \circ \mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{S} = 0$（$r \geq 2$）
- $r \geq 1$ として $S^r(M) = \mathcal{S}(T^r(M)),\ \bigwedge^r(M) = \mathcal{A}(T^r(M))$
- 任意の $x \in T^r(M),\ y \in T^s(M)$ に対し
  - $\mathcal{S}^{(r+s)}(x \otimes y) = \mathcal{S}^{(r+s)}(\mathcal{S}^{(r)}(x) \otimes y) = \mathcal{S}^{(r+s)}(x \otimes \mathcal{S}^{(s)}(y))$
  - $\mathcal{A}^{(r+s)}(x \otimes y) = \mathcal{A}^{(r+s)}(\mathcal{A}^{(r)}(x) \otimes y) = \mathcal{A}^{(r+s)}(x \otimes \mathcal{A}^{(s)}(y))$
- R-ベクトル空間としての直和 $\bigwedge(M) = R \oplus M \oplus \bigwedge^2(M) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(M)$ に対し 外積 を $x \in \bigwedge^r(M),\ y \in \bigwedge^s(M)$ に対し $x \wedge y = \mathcal{A}^{(r+s)}(x \otimes y) \in \bigwedge^{r+s}(M)$ で定義する。この環 $\bigwedge(M)$ を外積代数または交代代数という。このとき $i \geq 1$ に対し $\bigwedge^{n+i}(M) = 0$ で、さらに $\dim_R \bigwedge^r(M) = {}_n\mathrm{C}_r$（組み合わせの数）
- 外積代数の性質： $x, x_1, x_2 \in \bigwedge^r(M),\ y, y_1, y_2 \in \bigwedge^s(M),\ z \in \bigwedge^t(M)$ に対し
  - $(x_1 + x_2) \wedge y = x_1 \wedge y + x_2 \wedge y, \quad x \wedge (y_1 + y_2) = x \wedge y_1 + x \wedge y_2$
  - $(\lambda x) \wedge y = x \wedge (\lambda y) = \lambda(x \wedge y)$（$\lambda \in R$）
  - $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
  - $x \wedge y = (-1)^{rs}(y \wedge x)$
- $S(M) = R \oplus M \oplus S^2(M) \oplus \cdots \oplus S^r(M) \oplus \cdots$ とおき、和を加群としての和、積を $x \in S^r(M)$, $y \in S^t(M)$ に対し $x \cdot y = \mathcal{S}^{(r+t)}(x \otimes y)$ と定義すれば $S(M)$ は環となる。これを M の対称代数という。

メモ