代数学 B・演習　おぼえ書き　その 6

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **テンソル代数（tensor algebra）**

  反変テンソル空間（contravariant tensor space）、共変テンソル空間（covariant tensor space）、結合多元環（associative algebra）、対称テンソル（symmetric tensor）、交代テンソル（alternating tensor）、対称化作用素（symmetrizer）、交代化作用素（alternatizer）

- **交代代数と対称代数**

  外積代数[1]（exterior algebra）、対称代数（symmetric algebra）

Q & A 企画

- 今回のおぼえ書きプリントと一緒に「質問・相談カード」を配布しました。これは、皆さんがこれからセミナー配属を控えているということで、九重研修で解決出来なかったいろいろな不安や疑問を皆で共有して、少しでも取り除けたらという趣旨で行うものです。この授業の成績評価等とは何ら関係ありませんので提出は任意ですが、材料は出来るだけ多いほうが皆さんのためになると思いますので、是非ご協力ください。

- **質問は（答えられる範囲であれば）何でも／いくつでも構いません。**

  - **この講義・演習（代数学 B・演習）の内容に関する質問**

  でも勿論構いませんが、どちらかと言えば普段あまり聞くことの無い

  - **セミナー配属について**
  - **自分の進路について**
  - **数学に関する（一般的な）興味・質問**
  - **その他 TA に聞いてみたいこと**

  などを想定しています。

- ご回答頂いた「質問・相談カード」は、**6 月 30 日（火）の演習の時間に回収**致します。皆さんから寄せられた質問・相談とこれに対する回答は、**7 月 21 日（火）に配布の「おぼえ書き」（最終回）に掲載**致します。なお、質問文はすべて匿名にしたうえで、読みやすいように体裁を変える可能性があります。

[1]別名**交代代数**、或いは**グラスマン代数**（Grassman algebra）といいます。

チェックポイント

巷では新型インフルよりも「テンソル・パニック」が大流行のようです。がんばってください !!

- **演習問題 7-1：**これにより同型 $S^{-1}M \simeq M \otimes_R S^{-1}R$ が得られます。これ以降の問題を解く際に時々使うので、押さえておきましょう。

- **演習問題 7-3：局所化**（localization）の手順はパッと見複雑そうですが、そういう場合は簡単な例で納得することにしましょう。前回の「おぼえ書き」その 5：No.3 で次のような例を紹介しましたね：

  q を素数とし、$\mathbb{Z}_{(q)}$ を $\mathbb{Z}$ の素イデアル (q) における**局所化**とすると、$\mathbb{Z}_{(q)}$ は次で表される。

  $$\mathbb{Z}_{(q)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ q \nmid b \right\}$$

  これは文中の記号において $S = \mathbb{Z} \setminus (q) = \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ として得られます。b が q の倍数でない理由は S の作り方から分かりますよね。

- **演習問題 7-4：**準同型 $f \otimes \mathrm{id}_{S^{-1}R}$ は $M \otimes S^{-1}R \to N \otimes S^{-1}R$ のことだと見ています。記号があふれて混乱しやすいので整理しながら考えていきましょう。

- **演習問題 7-5：台／サポート**（support）とは

  $$\mathrm{Supp}(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

  のことでした。ちなみに R の素イデアルの集合のことを $\mathrm{Spec}(R)$ と書いて (affine) spectrum と呼びます。さて、(1) の主張は $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ とおくと

  $$V(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Supp}(M)$$

  と書けます。このとき特に $\mathrm{Supp}(M)$ は $\mathrm{Spec}(R)$ の閉集合[2]になっていて、更に R のイデアル I に対して

  $$\mathrm{Supp}(R/I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\} = V(I)$$

  も成り立ちます（上の主張の系）。

  ちょっと本題からは外れますが、せっかく $\mathrm{Spec}(R)$ の話をしたのでもう少しだけ。一般に R の素イデアルの集合はどんなものの集まりなのか考えてみましょう。

  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ··· (0) と単項イデアル (p)（p は素数）
  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ ··· (0) のみ
  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X])$ ··· (0) と単項イデアル $(X-c)$（$c \in \mathbb{C}$）
  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X])$ ··· (0) と単項イデアル $(X-a)$（$a \in \mathbb{R}$）と単項イデアル (X^2+bX+c)（$b, c \in \mathbb{R},\ b^2-4c<0$）

  以下は余力のある方への研究課題としておきます：

  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]) = ?$　※ 上の $\mathbb{R}[X]$ よりも少し事情が複雑です。
  - $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) = ?$　（p は素数）
  - 体でない 環 R で、$\mathrm{Spec}(R)$ が一点集合となるような例を挙げよ。

[2] Spec には**ザリスキー位相**（Zariski topology）という位相を入れています。詳しいことを知りたい方は、代数幾何関連の本を手に取ってみてください。

- **演習問題 7-7(2) & 7-8：** 本質的に外積の性質しか使いませんが、少々構成がややこしいので補足しておきます。まず、外積代数自体はその性質から

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r(V)$$

という風に有限個の直和で書けていました。そこで $\bigwedge(V)$ の元を $\omega_r \in \bigwedge^r(V)$ を使って

$$\sum_r \omega_r = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n$$

と有限和の形で書いてみます。そうすると、$\bigwedge(V)$ の中心（center）とは、任意の $\sum_s \omega'_s = \omega'_0 + \cdots + \omega'_n$ に対して

$$\left(\sum_r \omega_r\right) \wedge \left(\sum_s \omega'_s\right) = \left(\sum_s \omega'_s\right) \wedge \left(\sum_r \omega_r\right)$$

をみたすような $\sum_r \omega_r$ の集合ということになります。これをチェックするには、上の有限和をバラした後、更に

$$\omega_r \wedge \omega'_s = (-1)^{rs} \omega'_s \wedge \omega_r$$

を使って等号成立の条件を根気良く探せば出来るはずです。慣れないうちは r, s を具体的な小さい自然数にしてやってみると良いでしょう。

一方 $\bigwedge(V)^{\mathrm{op}}$ は $\bigwedge(V)$ での左からの作用 $(\sum_r \omega_r) \wedge (\sum_s \omega'_s)$ が右からの作用 $(\sum_s \omega'_s) \wedge (\sum_r \omega_r)$ に逆転してしまっている、という環だったのでした。上の 2 つの元が 1 対 1 対応になっているということと、やはり $\omega_r \wedge \omega'_s = (-1)^{rs} \omega'_s \wedge \omega_r$ を使えば示すことが出来ます。

- **演習問題 7-9：** 前回の「おぼえ書き」その 5 の例で掲載した略解の別証明になっています。こちらの方が分かりやすいかもしれませんね。

- **研究課題：** ここで登場した $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ や $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ を含め、以下の群は特に Lie 群論をはじめとする多種多様な分野で使われています。この機会にチェックしておきましょう。

  - **特殊線形群**　$\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid \det(A) = 1\}$
  - **直交群**　$\mathrm{O}_n(K) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid {}^tAA = I_n\}$
  - **特殊直交群（回転群）**　$\mathrm{SO}_n(K) = \{A \in \mathrm{O}_n(K) \mid \det(A) = 1\}$
  - **ユニタリ群**　$\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}$
  - **特殊ユニタリ群**　$\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$

  但し $A = (a_{ij})$ に対し ${}^tA = (a_{ji})$：転置、$A^* = (\overline{a_{ji}})$：転置の共役を表します。

- **その他：行列表示に関する例**

テンソル積に関する例としてもう一つ。M を有限個の基底を持つ自由 R-加群とし、R-双線形

$$M^* \times M \to R\,, \quad (x^*, y) \mapsto x^*(y)$$

の引き起こす線形写像 $M^* \otimes_R M \to R$ と、R-同型

$$M^* \otimes_R M \ni x^* \otimes y \mapsto (x \mapsto x^*(x)y) \in \mathrm{End}_R(M)$$

の 逆写像 との合成を

$$\mathrm{Tr}: \ \mathrm{End}_R(M) \to R$$

と書き、$\mathrm{Tr}(u)$ を u の**トレース**（trace）と呼びます。ここで u の基底に関する行列表示を (a_{ij}) と書くと、$\mathrm{Tr}(u) = \sum_i a_{ii}$ となり、線形代数で勉強したトレースの定義そのものとなっています。

$$***$$

いろいろな例を知ろう

テンソル代数の例をいくつか。ほとんど定義の確認ですが、抽象的表現に頑張って慣れましょう：
※ 記号はテキストに従いました。講義での記号と一部異なる箇所がありますのでご了承ください。

- **反変テンソル／共変テンソルの例：**
  - F を体、V を F-ベクトル空間とする。このとき

    $$\mathrm{Hom}_F(V, V) \simeq V^* \otimes V = T_1^1(V)$$

    となる。すなわち V の線形変換は **1 階反変 1 階共変**テンソル。
  - 双線形写像全体の集合 $\mathcal{L}$ の定義はテキスト p.35 を参照。上の記号の下で

    $$\mathcal{L}(V, V; F) \simeq V^* \otimes V^* = T_2^0(V)$$

    となる。すなわち V 上の双線形形式[3]は **2 階共変**テンソル。
  - $T_s^r(V)$ の双対空間は $T_r^s(V)$ である。すなわち

    $$T_s^r(V)^* \simeq T_r^s(V)$$

    となる。ここでは

    $$t = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s \in T_r^s(V) \ \ (\psi_i \in V^*, \ w_j \in V)$$

    を、次のような対応：

    $$t(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_s \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \varphi_1(w_1) \cdots \varphi_s(w_s) \psi_1(v_1) \cdots \psi_r(v_r) \in F$$

    $(\varphi_i \in V^*, \ v_j \in V)$ によって $T_s^r(V)$ 上の関数とみなしている。
  - $\mathcal{L}(V, W; U) \simeq \mathrm{Hom}_F(V \otimes W, U) \simeq (V \otimes W)^* \otimes U \simeq V^* \otimes W^* \otimes U$ において $W = U = V$ とすれば

    $$\mathcal{L}(V, V; V) \simeq V^* \otimes V^* \otimes V = T_2^1(V)$$

    となる（**1 階反変 2 階共変**テンソル）。ここで $T_2^1(V) \ni \varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes v$ $(\varphi_1, \varphi_2 \in V^*, \ v \in V)$ に対応する $\mathcal{L}(V, V; V)$ の元 m は

    $$m(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)v \ \ (v_1, v_2 \in V)$$

    によって与えられる。なおこの例で $U = F$ としたものが 2 番目の例。

[3] F-双線形写像 $V \times W \to U$ において $U = F$ のとき特に**双線形形式**（bilinear form）と言います。

- **対称テンソルと対称代数／交代テンソルと外積代数の扱いかた：**
  - $v_1, v_2 \in S^1(V) = V$ とし $t = v_1,\ t' = v_2$ とすると
  $$t \cdot t' = \mathcal{S}^{(2)}(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)$$
  - $v_1, v_2 \in \bigwedge^1(V) = V$ とし $t = v_1,\ t' = v_2$ とすると
  $$(v_1 \wedge v_2 =)\ t \wedge t' = \mathcal{A}^{(2)}(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1)$$
  積の順序を入れかえれば
  $$(v_2 \wedge v_1 =)\ t' \wedge t = \mathcal{A}^{(2)}(v_2 \otimes v_1) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathcal{A}^{(2)}(v_1 \otimes v_2) = -(v_1 \wedge v_2)$$
  となる。ここで $\sigma = (1,2) \in S_2$（2 次対称群)。
  - 上で見たように $S^1(V) = \bigwedge^1(V) = T^1(V) = V$
  - $T^2(V) = S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$ となる[4]。
  - $t = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \in S^2(V),\ t' = v_3 \in S^1(V) = V$ とすると
  $$\begin{aligned} t \cdot t' &= \mathcal{S}^{(3)}(t \otimes t') = \mathcal{S}^{(3)}\left(\frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1) \otimes v_3\right) \\ &= \frac{1}{6}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 + v_1 \otimes v_3 \otimes v_2 \\ &\qquad + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1 + v_3 \otimes v_2 \otimes v_1) \\ &= \mathcal{S}^{(3)}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) \end{aligned}$$
  - $t = \mathcal{S}^{(2)}(v_1 \otimes v_2) \in S^2(V),\ t' = \mathcal{S}^{(2)}(v_3 \otimes v_4) \in S^2(V)$ とすると
  $$t \cdot t' = \mathcal{S}^{(4)}(t \otimes t') = \mathcal{S}^{(4)}(\mathcal{S}^{(2)}(v_1 \otimes v_2) \otimes \mathcal{S}^{(2)}(v_3 \otimes v_4)) = \mathcal{S}^{(4)}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4)$$
  - R を体、M を R-ベクトル空間とする。反変代数 $T^*(M)$ から構成される結合的 R-代数（associative R-algebra）の構造：
    - 関係式 $x \otimes y - y \otimes x$ $(x, y \in M)$ によって生成される両側イデアルで $T^*(M)$ を割ったものが **対称** R**-代数** $S(M)$ である。
    - 関係式 $x \otimes x$ $(x \in M)$ によって生成される両側イデアルで $T^*(M)$ を割ったものが **外積** R**-代数** $\bigwedge(M)$ である。
    - (発展) $Q(x)$ $(x \in M)$ を 2 次形式とする。関係式 $x \otimes x + Q(x)$ によって生成される両側イデアルで $T^*(M)$ を割ったものが **クリフォード（Clifford）**R**-代数**[5]である。

[4] 2 次対称群 $S_2 = \{e,\ (1,2)\}$ の作用を $S^2(V)$ への作用と $\bigwedge^2(V)$ への作用とに分けて考えてみましょう。
[5] **スピン**（spin）という概念はここから来ています。

その他雑多なこと

この「おぼえ書き」プリントはどうやって作っているの？というご質問を頂いたのでちょっとだけ紹介。皆さんお馴染みの Microsoft Word や Justsystem 一太郎とは違い、**TeX（てふ）**というシステムを使っています。いわゆる普通のワープロソフトとは違い、文字や数式を入力する部分（エディタ）とそれを文書にして読んだり印刷出来るようにする部分（コンパイラ・ビューワ）が分かれているため、初心者にはなかなか扱いづらいのですが、一旦扱えるようになるともう手放せなくなること間違いなしです。今では数学の論文を投稿する際にはこの形式以外は受け付けないものがほとんどですし、Word や PowerPoint に付属している数式エディタとは比較にならないほどキレイな数式を書くことができます。
例えば次のような数式：

$$F = \int_D T \left(x(s,t);\ \frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t} \right) dsdt$$

は、TeX コードで

```
F= \int_D T \left( x(s,t); \ \frac{\partial x}{\partial s} \wedge
                                \frac{\partial x}{\partial t} \right) dsdt
```

と入力しています。少し慣れれば、打つのが面倒な `partial` などの長いコマンドをショートカットして打つことも可能です。
教職課程で「情報科」の免許も取得しようと考えている方は、こういったコンピュータを使った技術の習得を要求される傾向がありますので、興味を持ったりアルバイトで使ってみたいという方は少しずつ扱ってみると良いと思います。TeX 自体は無料で、入門書も数多く出版されていますが、特に私は

- 中橋一朗著「解決！ LaTeX 2$_{\varepsilon}$」（秀和システム）

をオススメします。辞書としても大変使いやすい一方、図と写真と適度に寒いギャグを交えながら懇切丁寧に説明されています。本屋さんで見つけたらぜひ手にとってみてください。