代数学 B・演習　おぼえ書き　その 8

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

業務連絡

- 横山は本日 14:00 から集中講義[1]のため、演習はお休みします。ご迷惑をお掛け致します（別に迷惑でない？）。
- 先日お配りしていた「質問・相談カード」を回収致します。
- 次回は **7 月 21 日（火）** です。これが最後の演習となります。

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **有限群の線型表現（Linear Representation of Finite Groups）**
  群の表現、群環上の加群、単位表現、正則表現、部分表現と商表現、既約表現と可約表現、完全可約、シューア（Schur）の補題、表現の直和、マシュケ（Maschke）の定理

前回の補足

- **演習問題 8-7：** 前回のおぼえ書きにちょっと誤解を招く表現がありました。チェックポイントの

$$0 \longrightarrow d\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{natural inj.}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{canonical}} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  は $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ の projective resolution の（単なる）一例として書きました。実際にこの問題 8-7 を解く際には「いろいろな例を知ろう」で紹介した proj. resolution：

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times d} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{canonical}} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

  を使います。何れもスライシング（slicing）を使って簡単に求められますね。

- **演習問題 8-10：** 偶数クラスでは証明なしに以下の事実を使いましたが、どうも奇数クラスでは NG だったようです。Ext の定義に従って求めよ、ということなのでしょう。しかしながら、以下の事実はホモロジー代数に限らず重要な事実ですから、ここで紹介しておきます。

  定理　R-加群の short exact seq. $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ に対して、Ext についての次の long exact seq. が得られる[2]。

$$\begin{aligned} 0 \quad \to \quad & \mathrm{Ext}^0_R(N_3, M) \to \mathrm{Ext}^0_R(N_2, M) \to \mathrm{Ext}^0_R(N_1, M) \\ \to \quad & \mathrm{Ext}^1_R(N_3, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(N_2, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(N_1, M) \\ \to \quad & \mathrm{Ext}^2_R(N_3, M) \to \cdots\cdots \end{aligned}$$

  long exact seq. を使わない証明は現在準備中です（書いてみると意外に大変でした）。7/21 の回に掲載予定ですので、もう少々お待ちください。

[1] 安生健一氏（株式会社オー・エル・エム・デジタル）「映像数学入門：An Introduction to Math for Computer Graphics」
[2] 証明は例えば堀田良之「可換環と体」（岩波書店）の 8 章「Cohen-Macaulay 環」の項を参照。

チェックポイント

- **演習問題 9-1：**ここで登場した積を convolution（畳み込み）と言います。ちょっと複雑で取っ付きにくいかもしれませんが、意外と目にする積の定義です。腕試しに以下のことを示してみてください：

  例題　G を有限群、R を unital な環とする。G から R への写像全体を $\mathrm{Map}(G,R)$ で表し、$f,g \in \mathrm{Map}(G,R)$ に対して加法を $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$（$x \in G$）で、乗法を convolution

  $$(f*g)(x) := \sum_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x)$$

  で定義すれば（但し右辺は G の全ての元 y にわたる和）$\mathrm{Map}(G,R)$ は環をなす。一般にこれは可換とは限らないが、G, R が可換ならば $\mathrm{Map}(G,R)$ も可換となる。更に G が単位群（単位元のみの群）でなく R が零環でなければこの環は零因子を持つ。

  もちろん G が非可換な場合は convolution による環も非可換となります。

  それから (2) で示すのは F-algebra としての同型なので、ただ単に同型写像が飛ばせるだけではなく「環としても同型」であることを示す必要があります。逆環（opposite ring）の取り扱いについては**演習問題 7-8** などが参考になるでしょう。

  では、試しに結合律だけチェックしてみましょう。

  $$\begin{aligned}((f_1*f_2)*f_3)(x) &= \sum_{y\in G}(f_1*f_2)(y)f_3(y^{-1}x) = \sum_{y,z\in G} f_1(z)f_2(z^{-1}y)f_3(y^{-1}x)\\ &= \sum_{y,z\in G} f_1(z)f_2(z^{-1}(zy))f_3((zy)^{-1}x) = \sum_{y,z\in G} f_1(z)f_2(y)f_3((zy)^{-1}x)\\ &= \sum_{y,z\in G} f_1(y)f_2(z)f_3((yz)^{-1}x) = \sum_{y,z\in G} f_1(y)f_2(z)f_3(z^{-1}y^{-1}x)\\ &= \sum_{y\in G} f_1(y)(f_2*f_3)(y^{-1}x) = (f_1*(f_2*f_3))(x)\end{aligned}$$

  ついでにもう一言、このように有限台付きの関数 $f:\ G \to F$ のなす空間に convolution で積を入れて得られる結合多元環 $\mathcal{H}(G)$ は一般に **Hecke 環**（Hecke algebra）と呼ばれているものの一つの例で、Hecke 環は現代の数学においてかなり重要な対象として研究されています。

- **演習問題 9-3：**同じ表現でも 何処上の表現 とみなすかどうかで既約性が変化します。環上の加群やテンソルの時と同じですね。

- **演習問題 9-4：**表現のテンソル積といってもピンと来ないかもしれませんが、

  - 知られた表現から別の新しい表現を作り出す。
  - 群 G の表現の一つひとつを独立で考えるのではなく、それらの間の相互関係を込めて理解する。

  という目的があります。これらは応用上なかなか有用であって、群 G とその作用についてより深く理解することが出来るようになります。

  例えば異なる 2 つの表現のテンソル積をとるということは、2 つの異なる群作用（action）が互いに干渉し合った場合どうなるのかを表しています。そのため、素粒子の衝突などの物理現象の解明や、化学反応を説明するケースモデルを構成する際に用いられることがあるようです。

- **演習問題 9-8：** 誘導表現の具体例はこの資料（No.2）裏面にも紹介しました。定義からも分かると思いますが、特に H の自明な表現 1_H を考えると、誘導表現 $i_H^G(1_H)$ は実は G の G/H 上での置換表現のことを表しています。

  ところで、こういう具体的な（しかもなるべく clear な）例を挙げるのって難しいですね。

- **演習問題 9-10：** Frobenius Reciprocity Law は、要するに表現の制限と誘導が「ある意味で互いに逆である[3]」という主張です。ちなみに今野先生の演習プリントに合わせて記号を i_H^G と書きましたが、大抵の本には Ind_H^G と書かれていると思います（induce の頭をとっている）。

$$\ast\ast\ast$$

いろいろな例を知ろう

今回は演習問題にも表現の構成例がたくさん登場していますので、そちらもチェックですね：

- **ビギナーズ：とってもカンタンな例：**

  有限群 G の線型表現 $G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ を具体的に与えてみる。

  - $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq S_3$　afforded by $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - $G \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　（$\rtimes$ は半直積[4]）
  - $G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$　afforded by $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **表現の例：**

  - F を体とし、$a \in F$（$a \neq 0$）をとる。$n \in \mathbb{Z}$ に対する F 上 2 次行列表現

    $$\rho_a : \ n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    は <u>既約でも完全可約でもない</u>。
  - 上の例で a を取りかえても ρ_a は互いに同型である。

[3] 正確には Res と Ind が互いに**随伴**（adjoint）である、と言います。
[4] 代数学 A：演習問題 4-7 参照。

– 位数 3 のアーベル群 $Z_3 = \left\{e, x, x^2\right\}$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ への写像

$$\rho :\ Z_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

を考える。但し元の対応は

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ ,\quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\ ,\quad x^2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与える。この表現 $(\rho, \mathbb{R})$ は 2 次の 既約 表現である。

– アーベル群 $T = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\} = \left\{z = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を考える（これはコンパクト)。この既約表現は 1 次元表現 $\chi :\ z \mapsto z^n$（$n \in \mathbb{Z}$）に同値である。

– **＜演習問題 9-3 に関連＞** 二面体群（dihedral group）D_n を考え、$2\pi/n$ 回転を r、折り返しを s で表す。2 次の行列表現 φ を

$$\varphi(r) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}\ ,\quad \varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定めて、既約 表現 $\varphi :\ D_n \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ を得る。

– 群 G の置換表現 $G \to S_n$ が定める線型表現 (ρ, F^n) において

$$V_1 = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1 = \cdots = \lambda_n\}\ ,\quad V_2 = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0\}$$

は部分表現 (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) を定める。ここで n が F で可逆ならば $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ である。

– 正則な三角行列のなす群

$$G_{trg} = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \mid \det(g) \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

を考える。但し A は $m \times m$、B は $m \times (n-m)$、C は $(n-m) \times (n-m)$ 型（$n > m$）とする。このとき G_{trg} は自身の $\mathbb{C}^n$ 上の表現 ρ とみなすことが出来る。ここで

$$U_m = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid u_k \in \mathbb{C} \right\}\ ,\quad V_{n-m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_{m+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_k \in \mathbb{C} \right\}$$

とすれば U_m と V_{n-m} は何れも $\mathbb{C}^n$ の部分線型空間であり、G_{trg} に対して U_m は ρ-不変（ρ-invariant）となる。一方、V_{n-m} は ρ-不変 にはならない。

– 上の例で、U_m は $\mathbb{C}^n$ の 既約 部分線型空間。

– $\mathbb{C}$ 係数の n 変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ を考える。k（$1 \leq k \leq n$）を固定し、$X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_k}$（$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$）の形の単項式全体で生成される有限次元部分空間を W とおくと、変数の置換による S_n の $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ への作用によって W は invariant subspace となり

$$W \simeq i_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n}(1_{S_k \times S_{n-k}})$$

が成り立つ（上の 1 は単位表現)。

コーヒー・ブレイク（前編）

以下は落合啓之氏の論説「SL_2 から始めよう」の一部を抜粋したものです、全文をお読みになりたい方は日本評論社「数学のたのしみ」2006 年冬号：フォーラム「現代数学のひろがり」をご覧ください。

＊＊＊

——2 月のある日、ある一人の学生が研究室を訪ねてきました。

X： 先生、こんにちは。

P： ああ、こんにちは。

X： 来年のゼミについて質問してもいいですか？

P： ああいいよ。

X： 先生の専門は表現論って書いてあるんですが、表現論って何だかイメージしづらいんですけど。

P： そうかあ、君は今、何を勉強してるの？

X： はい、○○先生のところで××を勉強してます。でもゼミを変えようと思ってるので、いろいろな先生のところを回って何をしているか聞いているんです。

P： その××はイメージしやすい？

X： はい。難しいけどやってることは××だから。

P： 表現論はなんでイメージしづらいの？

X： 先生の指定している教科書見たんですけど、行列とか、こんな感じの絵とか、何か級数とかも出てきて、ごちゃごちゃしてる感じがして。

P： ごちゃごちゃねぇ（苦笑)。うん、まあその、何でもありって感じなんだけどね。

X： 表現論って代数なんですか？

P： お？ うっ、必ずしもそんなことはないんだけどぉ。

X： 代数 B の講義で表現論を習ったし、群論の延長線って感じがするんですけど。

P： いやぁ、代数か幾何か解析かと言われると困るねぇ。

X： その辺のはっきりしないあたりが曖昧で気持ちが悪いんですが … 。

P： ちょっとこれ[5]見てごらんよ。

昨年の国際数学者会議の昼食の際、同席したある数学者に「私は、非可換調和解析、特に Lie 群のユニタリ表現を研究している」と紹介した。彼が「代数、幾何、解析すべての知識がいるので大変でしょう」と言うので、「いや、それは、代数、幾何、解析の接点にあるので、どの方面からもアプローチできる。私は解析を基盤としており、解析的方法で、代数的、幾何的結果をも得ることが可能なので、大変おもしろいのだ」と答えた。

X： ふうん、そんなもんですかねぇ。解析的手法で、代数的、幾何的結果といっても想像がつかないのですが。

P： 例えば、オペラや映画を考えてみようよ。俳優のように演劇部分を担当する人から、音楽、美術、建築、脚本などのさまざまの分野の人がそれぞれの持ち味を活かして仕事をしているよね。もちろん、他の部分の特性を理解していることが良い仕事をするカギになるけれど、それぞれの仕事の力点はやはり別々だよね。それらの組み合わせが妙味を生み出して一つひとつの分野だけでは出来なかった芸術となっている。何れにせよ、1 人で全部する必要はないしね。

[5]大島利雄「半単純対称空間上の調和解析」雑誌「数学」**37**（1985）97–112。