代数学 B・演習　おぼえ書き　ファイナル

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

業務連絡

- この「おぼえ書き」シリーズも遂にフィナーレを迎えました。ご愛読（!?）して下さった皆様、どうも有難うございました。この場を借りて厚く感謝御礼申し上げます。
- 前回「質問・相談カード」を提出してくださった方には用紙を返却致します。
- 定期試験は **7 月 28 日（火）** です。かげながら応援しております。

今日の演習内容（＝前回の講義内容）

- **表現の指標（character）：Schur/Weyl 流の構成**
  行列成分と指標、Schur の直交関係、既約分解、類関数、指標の直交関係

チェックポイント

テンソル積から一変した感がありますね。そこでひとつだけ注意しておきたいことを：

- [要注意] **記号** $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ **について：** これは「V から W への G-準同型全体の集合」という意味 **ではありません !!** 正しくは **「V から W への $F[G]$-準同型 全体の集合」** です。

  もう少しちゃんと書くと、V, W を F-線形空間とし、$G \curvearrowright V$ に対応する表現 $\rho_V : G \to \mathrm{GL}_F(V)$ と $G \curvearrowright W$ に対応する表現 $\rho_W : G \to \mathrm{GL}_F(W)$ に対して

  $$\mathrm{Hom}_G(V,W) = \{f \in \mathrm{Hom}_F(V,W) \mid f \circ \rho_V(g) = \rho_W(g) \circ f\} \quad ({}^{\forall} g \in G)$$

  と定義します（6/23 の講義のノートも参照）。この $\mathrm{Hom}_F(V,W)$ はこれまで通り「V から W への F-準同型（つまり F-線形写像）」の意味です。以上、混同しないよう注意してくださいね。

いろいろな例を知ろう

演習問題 10-6〜10-10 が具体例です。ここでは補足的な内容だけ。

- **演習問題 10-6：** 有限巡回群 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$（$n$ は自然数）の既約指標。
  (1) はテキスト章末の問題 3-15、(2) は (1) と同問題 3-12 を組み合わせれば良いでしょう。
- **演習問題 10-7：** 二面体群 D_n の既約指標。**この資料 No.3 も参照してください。**
  章末問題 3-17 の一般化です。因みに既約表現は次の通り：D_n の 1 次表現を列挙するのは clear。続いて ω を 1 の原始 n 乗根とし

  $$\rho_i(a^k) = \begin{pmatrix} \omega^{ik} & 0 \\ 0 & \omega^{-ik} \end{pmatrix}, \quad \rho_i(ba^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-ik} \\ \omega^{ik} & 0 \end{pmatrix}$$

で ρ を定義する（ここで a は $2\pi/n$ 回転（rotation）、b は鏡映（reflection）を表す）と、これらは互いに同値でない D_n の 2 次元既約表現であって、しかも指標の理論を使えばこれらで D_n の既約表現が全て尽きていることも分かります。

- **演習問題 10-8：** 4 次対称群 S_4 の既約表現の次数。

因みに既約指標まで求めると以下のようになります。まずは簡単な S_3 の例：

	e	(12)	(123)
1_{S_3}	1	1	1
sgn	1	-1	1
χ_ρ	2	0	-1

続いて本題の S_4 は以下の通り：

	e	(12)	$(12)(34)$	(123)	(1234)
1_{S_4}	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	1	-1
χ_ρ	3	1	-1	0	-1
$\chi_\rho \cdot \mathrm{sgn}$	3	-1	-1	0	1
μ	2	0	2	-1	0

ここで 1_{S_n} は自明な表現、$\mathrm{sgn}:\ S_n \to \{\pm 1\}$ は符号表現、χ_ρ は S_n の置換表現 $\pi:\ S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の自明表現の直交部分が与える既約表現 ρ（S_3 の場合は 2 次元、S_4 の場合は 3 次元）の指標、μ は Klein の 4 元群 V_4 が引き起こす全射準同型写像 $S_4 \twoheadrightarrow S_3$（この時 $S_4/V_4 \simeq S_3$）と S_3 の例での ρ との合成 $\mu : S_4 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を表します。

- **演習問題 10-9：** 四元数群 Q_3（位数 8）の既約指標。

章末問題 3-18 に同じ問題があります。

- **演習問題 10-10：** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ の既約指標の個数。

この指標表を作るのは一般には難しいので、結果だけ紹介しておきましょう。一般の場合：

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{F}_q,\ ad-bc \neq 0 \right\}$$

の指標表は次の通りです。

共役類の代表元	共役類の元の個数	σ_i	$\sigma_i \otimes \mathrm{St}$	R_{lm}	R'_n
z^i	1	ζ^{2li}	$\zeta^{2li}q$	$\zeta^{mi+lj}(q+1)$	$\zeta^{ni}(q-1)$
$z^i u$	q^2-1	$\zeta^{2li}q$	0	ζ^{mi+li}	$-\zeta^{ni}$
$z^i a^j$	q^2+q	ζ^{2li+lj}	ζ^{2li+lj}	$\zeta^{mi+li}(\zeta^{mj}+\zeta^{lj})$	0
b^k	q^2-q	ζ^{lk}	$-\zeta^{lk}$	0	$-(\xi^{nk}+\xi^{qnk})$

記号の詳しい意味はここでは省略します[1]。このように一般線形群の指標表を作るという営みは、20 世紀はじめの Frobenius による仕事を皮切りに、Steinberg や Green へと受け継がれました。最終的に Green によって $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ の指標表が決定されたのは 1955 年のことで、今から遡ることおよそ半世紀にも満たない時期だったのです。

[1] 記号の詳しい意味を知りたい方は、例えば庄司俊明「有限 Chevalley 群の表現論」（朝倉書店「群論の進化」第 3 章）などを参照してみてください。ちなみに $q=3$ の場合、この 4 つの既約指標はそれぞれ 2 個、2 個、1 個、3 個の取り方があるので、計 8 個あることになります。

いろいろな例を知ろう（続き）

比較的カンタンな例を思いつくまま挙げてみましょう：

- **表現の例（前回の続き）と指標の例：**
  - **簡単な例で復習：**$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C} \right\}$ の $V = \mathbb{C}^2$ における自然な表現 ρ を考える。このとき次が成り立つ。
    - $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{C} \right\}$ は G-不変部分空間。
    - 部分表現 (ρ_W, W) と商表現 $(\rho_{V/W}, V/W)$ は共に自明な表現。
    - しかし、ρ 自身は自明な表現の直和ではない。
    - 1 次元 G-不変部分空間は W しか存在しない。そのため、$V = W \oplus W'$ となる G-不変部分空間 W' は存在しない。
    - 以上より、ρ は G の「既約でも完全可約でもない」表現である。
  - $\mathbb{C}$ 上の 3 次元ベクトル空間 $V = \left\{ {}^t(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; x + y + z + w = 0 \right\}$ に S_4 は座標の置換で作用している。この表現 $\rho\colon\ S_4 \to \mathrm{GL}(V)$ は既約表現。
  - アーベル群（有限でなくてもよい）の既約表現は 1 次元である。
  - G を群、H は G の部分群でかつ <u>アーベル群</u> とする。このとき G の既約表現の次数は高々 $\#(G/H)$ 次元である（1 つ上の主張は G をアーベル群とし $H = G$ とすれば従う）。
  - G の表現 (ρ, V) に対し、$f\colon\ V \otimes V \to V \otimes V$ を第 1 成分と第 2 成分の入れかえとする。

    $$S^2(V) = \{ v \in V \otimes V \mid f(v) = v \}, \qquad \bigwedge^2(V) = \{ v \in V \otimes V \mid f(v) = -v \}$$

    とおけば $V \otimes V = S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$ であり、$S^2(V)$ と $\bigwedge^2(V)$ は何れも $V \otimes V$ の部分表現となっている。
  - 一つ上の例で与えた $V \otimes V$ の部分表現を $S^2(\rho)$, $\bigwedge^2(\rho)$ と書く。これらの指標は

    $$\chi_{S^2(\rho)}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2) \right), \qquad \chi_{\bigwedge^2(\rho)}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2) \right)$$

    で与えられる。同様にして

    $$\chi_{\bigwedge^3(\rho)}(g) = \frac{1}{6}\left(2\chi_\rho(g^3) - 3\chi_\rho(g^2)\chi_\rho(g) + \chi_\rho(g)\chi_\rho(g)^2 \right)$$

    なども確かめられる。
  - 表現 $\pi\colon\ G \to \mathrm{GL}(V)$ に対し、V に G-不変な正定値（positive-definite）Hermite 内積

    $$(x, y) = (\pi(g)x, \pi(g)y) \quad (g \in G)$$

    が入っているとき、π を**ユニタリ表現**（unitary representation）と呼ぶ[2]。このとき指標に関して $\chi_{\pi^\vee}(g) = \overline{\chi_\pi(g)}$ が成り立つ**（演習問題 10-3）**。実際

    $$\chi_{\pi^\vee}(g) = \mathrm{Tr}(\pi^\vee(g)) = \mathrm{Tr}({}^t\pi(g^{-1})) = \mathrm{Tr}(\pi(g^{-1})) = \mathrm{Tr}({}^t\overline{\pi(g)}) = \mathrm{Tr}(\overline{\pi(g)}) = \overline{\chi_\pi(g)}$$

    と計算出来る。

[2] 実は $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現はユニタリ表現に同値であることが知られています。

- **いくつかの補足**
  - 直和表現・テンソル表現の指標：(ρ, V), (σ, W) を群 G の有限次元表現とし、その指標をそれぞれ χ_V, χ_W とする。このとき
    - 直和表現 $(\rho \oplus \sigma, V \oplus W)$ の指標は $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ で与えられる。
    - テンソル表現 $(\rho \otimes \sigma, V \otimes W)$ の指標は $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$ で与えられる。

    前者は $\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ を、後者は $\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B)$ を使えば良い。
  - 一般に (ρ, V), (σ, W) が共に既約であっても、テンソル積 $(\rho \otimes \sigma, V \otimes W)$ は既約であるとは限らない。例えば GL_n の自然な表現 $V = \mathbb{C}^n$ は既約であるが、そのテンソル積は

    $$V \otimes V = S^2(V) \oplus \bigwedge^2(V)$$

    という形で GL_n-不変部分空間の直和に分解されてしまうので、$n \geq 2$ では既約ではないことがわかる。しかし、
    - 1 次元表現とのテンソル積をとること
    - 反傾表現（contragradient rep.：双対表現とも言う）を作ること

    に関しては既約性が保たれる。ちゃんと書くと次が成り立つ：(ρ, V) を群 G の表現、$\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ を G の 1 次元表現とすると、
    - ρ が既約ならば、テンソル表現 $(\rho \otimes \chi, V)$ も既約。
    - ρ が有限次元既約表現ならば、その反傾表現 $(\rho^\vee, V^\vee)$ も既約。
    - ちなみに ρ が完全可約ならば、テンソル表現 $(\rho \otimes \chi, V)$ も完全可約。

- **さいごに：**
  - 群 G から F-ベクトル空間 V の一般線形群 $\mathrm{GL}(V)$ への準同型を G の（線形）表現という。**線形表現とは、群の構造を行列または線形変換を用いて「写し取る」ことである。**
  - 群 G の表現は、群環 $F[G]$ を考えることによって環上の加群のことばに言い換えることができる。
  - F の標数が群 G の位数を割らないとき、G の F 上の表現は完全可約である。
  - 完全可約な表現の既約分解は一通りではないが、各既約成分の重複度は一意に定まる。
  - G の V 上の表現を調べるのには、V 上に G の作用と可換に作用するものを見つけることが有用である。
  - 表現の部分群への制限と相互関係にあるものとして誘導表現がある。これは「表現を作り出す」操作として重要である。
  - **有限群の標数 0 の代数閉体（例えば $\mathbb{C}$）上の表現の同値類はその 指標 で決まる。**

    つまり、既約表現を調べることと並んで（特にこれが難しい場合は）その指標を調べること・指標表を作ることは重要な問題である。

ちゃんと計算してみる：既約表現と既約指標

一般に有限群 G が与えられたとき

1. G の共役類を決定すること（各共役類の代表元を求めること）
2. G の互いに同型でない全ての既約表現（行列表現あるいは表現空間）を求めること
3. G の全ての既約指標を求めること

が有限群の表現論ではメインとなる問題です。このうち特に 2 と 3 に関しては、重要な群（有限体上の Lie 型の群など）に対してもまだまだ満足な結果が得られていません（つまり難しいということですね）。さらに、一般に 3 が比較的簡単に求められるような場合でも、2 は非常に難しいということもよくあります。

さて、**演習問題 10-7** で二面体群 D_n の既約指標を求めてもらいました。ここでは既約指標だけではなく既約表現まで求めてみることにしましょう。どうやって一つ一つのステップを処理していくのかを知る目安として読み進めてみてください。

$$***$$

二面体群 D_n は

$$a^n = b^2 = 1\ ,\quad b^{-1}ab = a^{-1}$$

という関係式をみたす 2 つの元 a, b で生成されるような群であって、よく a を回転（rotation）、b を鏡映（reflection）と呼んでいたのでした。この共役類の代表元は、代数学 A で勉強した群論の知識から

- n が偶数のとき　$1,\ a^i\left(1 \le i \le \dfrac{n}{2}\right),\ b,\ ab$　計 $\dfrac{n}{2}+3$ 個
- n が奇数のとき　$1,\ a^i\left(1 \le i \le \dfrac{n-1}{2}\right),\ b$　計 $\dfrac{n-1}{2}+2$ 個

であることが分かります（チェックしてみましょう）。また D_n の交換子群は a^2 で生成される巡回部分群 $\langle a^2\rangle$ となります。従って D_n の既約 1 次表現（既約指標）の数は

- n が偶数のとき　$[D_n : \langle a^2\rangle] = 4$
- n が奇数のとき　$[D_n : \langle a^2\rangle] = [D_n : \langle a\rangle] = 2$

と求められます。これらをちゃんと書いてみましょう。

まず n が偶数のとき

- $a \mapsto 1\ ,\ \ b \mapsto 1$（恒等表現）　$\langle a, b\rangle = D_n$
- $a \mapsto 1\ ,\ \ b \mapsto -1$　$\langle a\rangle$
- $a \mapsto -1\ ,\ \ b \mapsto 1$　$\langle a^2, b\rangle$
- $a \mapsto -1\ ,\ \ b \mapsto -1$　$\langle a^2, ab\rangle$

によって D_n の 4 個の 1 次指標が得られますね（最後に書いてあるのはそれぞれの表現の kernel)。
一方、n が奇数のとき

- $a \mapsto 1\ ,\ \ b \mapsto 1$（恒等表現） $\langle a, b\rangle = D_n$
- $a \mapsto 1\ ,\ \ b \mapsto -1$ $\langle a\rangle$

が D_n の 2 個の 1 次表現になっています。

では続いて 2 次の表現を考えてみましょう。まず、前回のおぼえ書きでも紹介しましたが

$$\rho_k(a) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & -\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n} \end{pmatrix}\ ,\ \ \rho_k(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という表現がありましたね[3]。これともう一つ

$$\rho'_k(a) = \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}\ ,\ \ \rho'_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

なる 2 次の表現を考えてみます。この指標を χ_k とおくと

$$\chi_k(a^i) = \omega^{ik} + \omega^{-ik}\ ,\ \ \chi_k(a^i b) = 0$$

と書けますが、これは最初に挙げた表現 ρ_k の指標と一致していることが確かめられますね。指標が一致することが、もとの表現が同型[4]であることの必要十分条件になっていましたから（テキスト p.87)、ρ_k と ρ'_k は同型な表現ということが分かります。

では、χ_k の内積 (χ_k, χ_k) を計算してみましょう。

$$\begin{aligned}
(\chi_k, \chi_k) &= \frac{1}{2n}\sum_{x\in D_n}\chi_k(x)\overline{\chi_k(x)} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\omega^{ik}+\omega^{-ik}\right)\overline{\left(\omega^{ik}+\omega^{-ik}\right)} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\omega^{ik}+\omega^{-ik}\right)\left(\omega^{-ik}+\omega^{ik}\right) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\omega^{2ik}+\omega^{-2ik}+1\right) \\
&= \frac{1}{2n}\left(2n+\sum_{i=0}^{n-1}\omega^{2ik}+\sum_{i=0}^{n-1}\omega^{-2ik}\right)
\end{aligned}$$

ここで次の性質を使いましょう（実際に計算してみてください)。

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega^{2ik} = \begin{cases} 0 & \left(k \neq \frac{n}{2}\right) \\ n & \left(k = \frac{n}{2}\right) \end{cases}$$

[3]前回のおぼえ書きでは $\rho_k(b)$ の行先の 1 と -1 が逆になっていますが、-1 倍しただけなので問題ありません。
[4]テキストでは「同値」と書いてあります。

そうすれば

$$(\chi_k, \chi_k) = \begin{cases} 1 & \left(k \neq \frac{n}{2}\right) \\ 2 & \left(k = \frac{n}{2}\right) \end{cases}$$

と整理できますね。というわけで、以上の議論から次が従います：

- $k \neq \dfrac{n}{2}$ のとき ρ'_k は D_n の既約表現
- $k_1 \equiv \pm k_2 \pmod n$ ならば $\chi_{k_1} = \chi_{k_2}$
- 次の表現は互いに同型ではない（指標が異なるから）：
  - n が偶数のとき　$\rho'_1, \rho'_2, \cdots, \rho'_{(n/2)-1}$
  - n が奇数のとき　$\rho'_1, \rho'_2, \cdots, \rho'_{(n-1)/2}$

結果をまとめておきましょう。

命題　二面体群 D_n の既約表現は以下からなる。

- n が偶数のとき、4 つの 1 次表現と $\dfrac{n}{2} - 1$ 個の 2 次表現 ρ'_k
- n が奇数のとき、2 つの 1 次表現と $\dfrac{n-1}{2}$ 個の 2 次表現 ρ'_k

この結果からすぐ指標表を作ることができます。まずは n が偶数のとき（ψ は 1 次、χ は 2 次）：

	1	a^i	b	ab
ψ_0	1	1	1	1
ψ_1	1	1	-1	-1
ψ_2	1	$(-1)^i$	1	-1
ψ_3	1	$(-1)^i$	-1	1
χ_k	2	$\omega^{ik} + \omega^{-ik}$	0	0

一方、n が奇数のときは

	1	a^i	b
ψ_0	1	1	1
ψ_1	1	1	-1
χ_k	2	$\omega^{ik} + \omega^{-ik}$	0

となりました。

最初にも述べた通り、既約指標を求めることは出来ても既約表現まで求めるのは一般には難しいのです。演習の時間にお友達が解説してくれた解答やテキストの例を見ながら、計算が出来るように練習してみてくださいね。

おまけとして、演習問題になかった指標表の例を 2 つだけ紹介しておきます。2 つめはかなり hard ですが、余力のある方は計算出来るかどうかチャレンジしてみてください。

4 次交代群 A_4（テキストの章末問題 19）　$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ として

(1)	(12)(34)	(123)	(132)
1	1	1	1
1	1	ω	ω^2
1	1	ω^2	ω
3	-1	0	0

5 次対称群 S_5

(1)	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)	(123)(45)	(12345)
1	1	1	1	1	1	1
4	2	1	0	0	-1	-1
5	1	-1	-1	1	1	0
6	0	0	0	-2	0	1
5	-1	-1	1	1	-1	0
4	-2	1	0	0	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1

ちなみに、一般の n 次の対称群の既約指標と既約表現は知られています。今日の講義でも出てきたかもしれませんね。

コーヒー・ブレイク（後編）

以下は落合啓之氏の論説「SL_2 から始めよう」の一部を抜粋したものです、全文をお読みになりたい方は日本評論社「数学のたのしみ」2006 年冬号：フォーラム「現代数学のひろがり」をご覧ください。

＊＊＊

X：表現論っていうのはこういう風に与えられた群の表現を分類して指標表を作るのが目的なんですか？

Q：ははあ、それは良い質問というか問題提起だね。

P：おや、いつのまにか戻って来られましたね、Q 先生。それでは表現論の典型的な定理の形を見てもらうことにしましょうか。まず、1 つの典型的な例は

G をなんとか群とする。V をなんとか表現とする。このときこれこれの性質が成り立つ。

という風に、与えられた群なり Lie 環なりに対してその対称性を調べますという定理です。

Q：最近は新しい代数系（quantum, super, conformal, affine, generalized, $\cdots\cdots$）が次々と定義されているから、その表現論も大忙しだ。

X：表現の分類や指標の記述は全部これに入りますね。

P：表現の構成や分解定理（Plancherel 型の公式）などもこれに入れていいことにしよう。

X：むちゃくちゃ大ざっぱですね。そうすると表現論でそうじゃない形の定理ってあるんですか？

P：それはね、

X をなんらかの数学的対象とする。X にはかくかくしかじかの性質がある。この性質は実はある群 G のある性質の反映である。

という形の定理なのだ。

Q：最初の定理だと G が最初に出てきて、この定理だと G が最後に出てくるわけだね。

X：実際にはどういう例を念頭においているのですか？

P：例えばテータ関数の Weil 表現を使った理解がそれにあたる。3 次曲面上に直線が 27 本乗っているということも E_6 型の Weyl 群の対称性によってより組織的に理解できる。

Q：Weyl 群といえば、Painlevé 方程式に存在する Backlünd 変換のなす群が affine Weyl 群になるなんて発見もある。ずっとさかのぼって、ソリトン方程式のような非線形可積分系を無限次元グラスマン多様体上の時間発展と理解するのもその流れだね。

X：なんか表現論であるようなないような … 。

P：そうですね。どこまでが表現論かという境目は非常に曖昧なのです。これらの場合は議論の出発点の段階では表現論ではないわけで、対称性 G は途中から突然出てくるんです。

X：石油探査や金鉱脈探しみたいですね。

Q：まぁ、何か特別なことが起こっている場合、例えば一般には複雑な系が今の場合だけ解けてしまうといった場合には、必ず背後に理由が隠れていると考えるのが自然だろう。つまり、いってみれば不思議議現象の解明の 1 つの手段として表現論が使われているのだ。

X：そういう理論はどうやって見つけるんですか？

P：これという手段があるわけではない。現象を注意深く見ながらわずかな手がかりを種に物語を組み立てていくんだけど … 。ひらめきも必要だね。

さいごに

期末試験に向けてのポイント：

- テンソル積に関して：特にテンソル積の普遍性とは何かをしっかりおさえた上で、簡単な（具体的な）加群と加群をテンソルして得られた「新しい」加群がどういう構造かを計算できるようにしておきましょう。演習問題で登場した例や、この「おぼえ書き」プリントに登場した簡単な例を手計算でチェック出来るかどうか確認してみてください。

  それから「完全列」にまつわるいくつかの加群やテンソルの性質を勉強しました。何をテンソルすれば単射性が保たれるのか、同型を示すにはあと何を示せば良いのか、well-defindness とは何か、などといった基礎事項は確実に習得しておきたいものです。

- 有限群の表現論に関して：覚えなければならない定義はそれほど多くはありません。一般論で抑えておきたいのは Schur の補題や指標の直交関係とその系など。これらは（位数の小さな）有限群の既約指標を計算したりする際に使います。とにかく表現論では抽象論だけだと全くイメージが湧かないので、手を動かして計算の練習をしてみてください。演習の時間で友達が解説してくれた例をながめて参考にするのも良いでしょう。

皆さんの健闘を祈っています。

夢をかなえる道のりに
障害が立ちはだかったとき、
僕はいつも自分にこう言い聞かせてきた。

レンガの壁がそこにあるのには、理由がある。
僕の行く手を阻むためにあるのではない。
その壁の向こうにある「何か」を
自分がどれほど真剣に望んでいるか、
証明するチャンスを与えているのだ。

"The Last Lecture"
Really Achieving Your Childhood Dreams
by Randy Pausch with Jeffrey Zaslow

Questions & Answers

アンケートにご協力頂いた皆さん、ありがとうございました。全員分の質問と横山の回答を紹介します。青字が皆さんのコメント、黒字が横山のコメントです。

なお、提出して下さった方へは「質問・相談カード」を返却致します。ここには私のコメントの他に、私の知り合いの院生さんからのコメントも載っています。ぜひ参考にしてください。

- 代数が基本的にわかりません。
- 代数が難しすぎます。
- 数学がわかりません。どうしたら良いですか？
- 代数がどうやったらわかるようになるのか教えてください。
- 代数が絶望的な状態ですが、数学科を卒業することができますか？

  今年は代数の「当たり年」でしたね（笑）それはともかく、代数が難しいと感じるのは多分他の数学科目とかなり違った感じがするからでしょうね。複素積分したり、曲面上で微分したりするのとは違って、何となくイメージが湧かなかったり、記号や定義がたくさん出てきて混乱してしまったり … そういう理由がほとんどだと思います。そして何より「どう役に立つのかわからない」というのも大きな理由でしょう（これについては 3 つ下の質問参照）。

  同じ代数でも線形代数は行列という数をあてはめれば納得出来る（出来たような気がする）ので、こちらはそうでもなかったという人も多いみたいです。そこで「おぼえ書き」ではなるべく「数字や図形を使った例」をたくさん作ってみました。参考になりましたでしょうか ??

  代数は抽象数学を勉強していく上での「辞書」みたいなものだと思ってください。他の数学をしていて計算が詰まってしまったり、ごちゃごちゃして分からなくなってしまったとき、代数の分野で分かっている事実をそれぞれのシチュエーションに当てはめてやれば、次のステップへと進むことが出来ます。例えば幾何学の分野である図形のホモロジー群を計算せよ、と言われたときに、別に代数について詳しいことを知っていなくても、事実さえ分かっていれば機械的に計算するだけで済んでしまいますよね。分からない所だけ抜いてあてはめて使う。そして次へと進む。ちょうど外国語を読んでいて辞書を引いたりするのと同じようなものです。

  代数の勉強の仕方は他の幾何や解析と全く変わりません。いろいろな事実を知る。いろいろな例を知り、可能なら自分で例を作ってみる。実際に手を動かして計算してみる。そして間違える。計算し直す … ということを繰り返しているうちに、ふっと頭の中にイメージが浮かんできたり、ごちゃごちゃしていた物がすっきり整理されるということがあるでしょう。そこまでは努力あるのみです。お互いがんばりましょうね。

  それから最後の方、卒業は出来ます。必ず出来ます。ご安心を☆

- 加群の理論において、幾何学的な何かを連想させるような名称のついた概念（捩れ、平坦、局所化、射影的など）がいくつも出てきましたが、今のところ局所化以外に関しては、その名前から何も連想されません。こういうものは、いつか分かる日が来ると信じて、今はただ受け入れるしかないのでしょうか。

  こういう質問をしてくれたということは、きっと幾何系に進むつもりなのでしょうね。局所化は幾何的意味がつかめたということですが、どんなイメージですか ??（人によってイメージは結構違うので、聞いてみるのもなかなか楽しいのです）

  ただ素直に受け入れるのも良いと思いますが、名前の由来を探してみるということも大事かもしれませんね。理解の深さも変わってきますし … 。ただかなり進んだ話題まで行かないと本当の意味がつかめないということもあります。

  敢えてアドバイスをするなら、名前の本当の由来を知りたいときは、和書（日本語）よりも洋書（外国語）のほうが良いことが多いような気がします。たまに日本語訳が変なせいで余計混乱してしまう、ということもあるんですよ。例えば field って何で「体」って訳すんでしょうね。

- 添字は動くのですか。それとも走るのですか。

  添えるもの、というのは冗談で、これはどちらもよく使われていますよね。ニュアンスとしては「考えられる範囲全てをわたる」という意味で使うなら「走る」が正しいような気がします。ゴールに向かって走り切る、みたいな。動くという言い方はもう少し自由度が高いような感じがしますが、如何でしょうか？

- 世の中に出て、代数ってどんな役に立つんですか？

  線形代数は説明不要ですね（大活躍してます）。純粋な代数学としてはやっぱり暗号（cryptography）への応用があります。情報科の免許を取られる方は先日の高木先生の講義を受けられたと思いますが、RSA 暗号の活用など、あんな感じです。Amazon.com で安心してクレジットカード払いが出来るのも、暗号化のお陰というわけですね。

さて、役に立つかはともかく、代数学をバックボーンとして生まれたものは数多くあります。解析学は連続した量や対象を扱うのが得意なのに対して、代数学は離散的なものへの適用を得意としていますから、特に組み合わせ論（combinatorics）などと密接に関係しながら発展を続けたり、という歴史もあります。一昔前に大流行したルービック・キューブなどは、代数的組み合わせ論の問題としては非常に面白い対象ですし、ゲームが成立する・しないということを保証する際にも代数学は役に立っているのです。

更に、代数学は数学以外への応用で力を発揮することも多く、これまで皆さんが勉強してきた表現論は物理・化学への応用も知られています。ベンゼン（C_6H_6）の励起状態を知る目安（電子のハミルトニアン）と、二面体群の作用で不変な量とが密接に関係しているなど、驚きですよね。

ということで、代数は世の中で「スポットライトを浴びている」というよりは「縁の下の力持ち」的な役割で活躍していると言えるのではないでしょうか??

- 私は将来高校の教師になりたいのですが、代数を学んでいてよかった、という場面にあうことはあると思いますか？ あると思うのならその例をあげて下さい。

  正しいかどうかはともかく、私個人の意見として言います。

  代数を勉強していると、解析などの具体的な計算、特に収束や積分などの「面倒くさい評価」をそれほどやる機会がありません。局所的にごちゃごちゃしていることは、代数の理論で一気にスキップしてしまえる事が多いからです。そういう経験をしていると、何となく得した気分になります。

  高校の数学は具体的な関数ばかりを扱います。彼ら（高校生）はこれから大学に進んで、少なからず数学を勉強しなければいけないわけですが、ここで登場するのは「一般論・抽象論」という強敵です。そこで、高校生のうちに「数字のかわりに記号で書くとこんなにラクなんだよ」ということを感じさせてあげれば、多少なりともスムーズに大学の数学に入って行けるんじゃないかと思います。そういう意味では「記号を扱う恩恵を知っている」こと、つまり代数を勉強していることは、彼らに教える上でちょっとは役に立つのではないでしょうか？

  あと代数学っておそらく、高校数学から一番かけ離れた数学という感じがしますよね。ですから、大学の専門の数学ってこんなんだよ、と教育実習の時に高校生に教えて「カルチャー・ショック」を与えてみたり、話のタネにはなりましたね。

- 院試は難しいですか？

  正直、そんなに難しくはありません（でも「ナメては」ダメです）。九大数理の院試は 3 パターン（数学コース／数理科学コース／ MMA コース）ありますが、主に「基礎科目」と「専門科目」の 2 種類を受験することになります。「基礎科目」とは 1 年〜2 年前期までに勉強した線形代数・微分積分とその続論（重積分など）の内容、「専門科目」は 2 年後期以降、ちょうど今皆さんが勉強しているような内容から好きなものをいくつか選んで解きます。過去問は九大数理のオフィシャル HP：

  http://www.math.kyushu-u.ac.jp/entrance/kakomon.php

  にありますので、腕試しにやってみるのも良いかもしれませんね。もちろん忘れてしまっていることもあるので、大抵院試の 1ヶ月前くらいから復習して臨む、というケースが多いようです。

- 院に行くと何か就職に有利なことってありますか？

  そうですね。まず教職を受けている方は修士まで出ると免許に「箔が付き」ます。学部で取れるのは「中一種・高一種」免許ですが、修士号を取得すると「中専修・高専修」に変わります。一昔前は専修免許だと 2 年分の昇給ブランクが埋められる上収入も高い、みたいなこともあったようですが、現在はどうなのかよく分かりません。

  それから企業で「研究部門」に就きたいと思っている方や、生命保険・損害保険のアクチュアリーなど、何か特別な資格を得て就職したいという方は、院生期間をうまく活用すれば実現出来るでしょう。何れにせよ「何か研究活動を経験している」ということを強みに出来る場面は意外と多いものですよ。

- セミナーの先生の紹介とかのせてほしいです。

  50 名以上の先生を一人ひとり紹介するのはとてもムリなので、何人かには「ものまね付きで」紹介しましたよね（笑）

  実際に会って確かめてみるというのが一番だと思いますが、なかなか出現しない先生もいらっしゃいますから、（私を含め）いろんな院生さんを捕まえて情報を収集してみましょう。口コミというのはなかなか強力な情報源です。

  ··· というか、紙面で「ぶっちゃけた話」は怖くて書けません。個別に聞いてください（笑）

- 学部で卒業・就職しようと考えてる場合、オススメのセミナーや分野はありますか？

  せっかく 1 年半セミナーで勉強するのですから、やっぱり「自分の一番興味のあるもの」を選ぶのがベストじゃないかなと思います。就活に強いからという理由で「嫌いな分野なのに」仕方なく進むというケースもいくつか聞いたことがありますが、やっぱり充実した大学生活は送れないと思います。もったいないですよね。ただ、就職しようとしている業種がある程度決まっていて、それに向かって勉強する内容を選ぶんだ、というならこれ以上ベストなものはないですね。

  参考になるかどうかは分かりませんが、九大数理の博士課程（機能数理コース）に長期インターンシップという制度があり、在学期間中 3ヶ月以上の企業実習が必修になっています。これに対応する教科として「最適化理論」（optimization）があり、講義として開講されています。私もこの前期に 3ヶ月受講しましたが、これは純粋に数学としても面白いですし、企業の方の生の声を多く聞くことが出来るという面でもなかなか充実していました。オススメです。

- TAってどんな仕組みなんですか？

  九大数理の修士・博士の学生であれば、原則（指導教官の許可があれば）誰でもやることが出来ます。全学の授業と工学部の授業、そしてこの数学科の演習に割り振られますが、専門でない科目に配属となることも十分あります。つまり、代数系の学生が Lebesgue 積分の演習につくということもあるのです。

  給料はいわゆる「アルバイト」ではなく理学部からの「正式採用」扱いとなります。差し詰め「勤労学生」というポジションですね（笑）例えば数学科の講義では、実際は演習の 2 時間半だけ働けば良いのですが、時間給としては講義の時間も含めて計上されます（つまり … 言いたいことは分かりますよね？）。ですがその分労力も相当なもので、事前の予習や教え方の工夫、必要ならばこういったプリントを作ってみる（但し残業手当は出ないので、ボランティアみたいなものです）、そして「質問に答えられるかどうか」というプレッシャーにも耐えなければいけません。ですが、自分の気持ち次第で TA のお仕事はとても充実したものになります。違う学年の学生さんと交流出来るということも良い刺激になりますよ。

  ちなみに後期の私は経済学部 1 年生向けの線形代数を担当する予定です。数学科とはまた違った発見と出会いに期待です☆

- 横山さんの専門は何ですか？（何を研究しているのですか？）

  計算機数論（Computational Number Theory）です。私は代数系というよりは、半分解析系に足を突っ込んでいるような感じかもしれません。ただ、所属しているセミナーが代数系なので、一応代数という括りになってはいますが … 。

  この分野はまだ発展途上というか、ちょっと特殊で、日本人でこの分野をやっている人はほとんどいませんし、まして日本語で書かれた文献などは皆無と言ってもいいかもしれません。

  簡単に紹介しましょう。解きたい問題は純粋に代数の分野にある問題なのですが、その解決法が少し現代チックです。特に今扱っているのが Serre の保型性予想（modularity conjecture）と呼ばれているもので、一番基礎的な予想がつい 2 年前、2007 年に解かれたばかりという非常にホットな分野です。Serre 予想とは大雑把に言うと、Galois 表現という「代数的」対象と、モジュラー形式という「解析的」対象に「ふしぎな 1:1 対応」が存在するはずだ、という予想で、有名な「フェルマーの最終定理」を含む強力な予想となっています。そこでその対応を探すためには、両者を詳しく調べて素性を明らかにする、ということが課題になります。

  コンピュータに問題を解かせる・計算させるということは解析の分野や統計の分野だけだと思っている方も多いと思いますが、代数的なものもコンピュータでやっつけてしまおう、という戦略をとるのが計算機数論の一つの特徴です。内容自体は非常に hard で難しいですが、発展途上という性質上、比較的早く最新の論文や結果に手を伸ばすことが出来るという意味では魅力的かもしれませんね。

  あと（ほとんど趣味的にしか知りませんが）暗号理論や CG など映像への応用などにも興味があります。

- 3 年後期からセミナーが始まりますが、就職に役立たせるためにも統計に進もうかと思っています。しかし、統計が得意なわけではありません。横サマ（横山注：一部の学生さんからこう呼ばれてます）はなぜ数論へ進もうと決めたのですか？

  そうですねぇ … 、単純に「面白そう」だったからでしょうか？

  というか、もともと自分はコンピュータを使えるような分野が好きで、つまり解析や統計に進むんじゃないかなと思ってました。ただ、数論は純粋に数学として面白そうだな、と思ってました。代数はそれなりに得意でしたが、これといって大好きというわけでもなかったですね。

  それと私は「人が勉強していること」とは違うことをしたい、というポリシー（と言うとカッコ良く聞こえますが、ただのあまのじゃくです；）があって、例えば先輩の院生さんのやり残した仕事の続きをやる、ということは絶対にやりたくありませんでした。何となく「その人は超えられない」ような気がしたからかもしれません。

  今の分野（計算機数論）を始めたのは 4 年の始めくらいだったと思います。当時は教育実習とか院試とかでバタバタしていたのでそれほど勉強していませんでしたが、つい数ヶ月前に出たばかりのテキストを読

める、ということは純粋にうれしかったですね。自分が「新しいもの好き」なこと、計算機（コンピュータ）を使えること、そして何よりその分野をやっている人は海外に数人しかおらず、発展途上だったことが決め手だったと思います。こうなると、イヤでも「自分で何とかしないといけない！」と自分を奮い立たせないといけないので、三日坊主な私でも続けてこれたのかなぁ、と（これを書いている今）思いますね。

統計という分野は計算機数論とよく似ていて、得られたデータから推理をめぐらせてパターンを追跡する面白さに溢れています。こういったことが純粋に「好き」「面白い」と思えるならば、得意不得意は関係ありません。就職に有利かどうかという事も重要なポイントですが、まずは自分の興味とじっくり相談することが肝要だと思いますよ？

- 3 年後期から 4 年にかけて、どのくらい勉強しましたか？

  この時期は教育実習なんかでバタバタしていた思い出があるので、あんまり自分の勉強（セミナーの内容）をしている時間はなかったような気がしますね。。。

  というか、多分私は人よりも全然勉強時間は短いと思います。威張れることじゃないんですが、根っから集中力がそれほど持たないですし、勉強するときはいつも音楽やラジオを付けてたり …「ふまじめ」なんです（笑）

  ただ、同級生と演習後にちょっとした議論や問題を解いたりして楽しく過ごしたりした思い出はありますね。ああいう時間は意外と過ぎるのが早くて、一人で勉強するよりも何倍も充実していました。もちろん数学は一人で勉強しないと身に付かないんですが、こういったディスカッションの時間もとっても大事だと思います。とにかく勉強は「何時間したか」よりも「どれだけ充実しているか」ではないでしょうか。

- 横山さんは、どうやって自分の時間を作ってるんですか？（or 自分の時間はありますか？）

  結構私の周りでも「忙しい」「ヒマがない」という言葉を耳にするんですが、意外と空き時間ってあるものです。要は「時間をうまく使う」ことが大事ですね。

  自分の時間がとれないという状態を「忙しい」と捉えるか「充実している」と捉えるかで、毎日の気分も相当変わってくるものです。空いた時間には映画をみたり、時には創ったり（何人かの学生さんにはお話しましたね）、ぷらっと出かけたり、友達と飲みに行ったり … 結構時間は「作らなくても」あるものですよ☆