代数学 B・演習　おぼえ書き　番外編（7/21 演習後の補足）

内容の誤りやタイプミスなど発見されましたら、横山までご一報下されば幸いです。
Contact: 4 号館 4103 院生室（1F セミナー室 3）／ yokoemon@gmail.com

既約指標の求めかた

与えられた群 G の表現に対する既約指標 $G \to \mathbb{C}^\times$ を求めるときには、次のようにやってみましょう：

- **Step.1：群 G の共役類を求める**

  代数 A で勉強したことを使います。まず定義をおさらい：

  定義 1（テキスト「代数学 I」p.30） G を群とする。$a, b \in G$ に対し $g \in G$ が存在して

  $$b = gag^{-1}$$

  となるとき、$a \sim b$ と定義する[1]。このとき、b は a に**共役**であるという。
  これで定まる同値類を**共役類**という。

  例をいくつか挙げてみましょう：

  - **例 1：Klein's Four**　$V_4 = \{e, s, t, st\}$（$s^2 = e, t^2 = e, st = ts$）という位数 4 の群。まず e は任意の g に対して $geg^{-1} = gg^{-1} = e$ なので e だけで一つの共役類をなす。次に s は

    $$sss^{-1} = s, \ tst^{-1} = stt^{-1} = s, \ (st)s(st)^{-1} = stst^{-1}s^{-1} = ststs = s^3t^2 = s$$

    なのでやはり s だけで一つの共役類。t と st についても同様。よって V_4 の共役類は 4 つある。

  - **例 2：二面体群 D_4**　$D_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$（$\sigma^4 = e, \tau^2 = e, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$）という位数 8 の群。まず e は 1 つで共役類、次に σ は

    $$(\sigma^k\tau^l)\sigma(\sigma^k\tau^l)^{-1} = \sigma^k\tau^l\sigma\tau^{-l}\sigma^{-k}$$

    から、$l = 0$ のとき $\sigma^k\sigma\sigma^{-k} = \sigma$、$l = 1$ のとき $\sigma^k\tau\sigma\tau\sigma^{-k} = \sigma^k\tau\tau\sigma^{-1-k} = \sigma^{-1} = \sigma^3$ となり、2 つの元 σ, σ^3 からなる共役類が出来ます。以下同様にして D_4 の共役類は

    $$\{e\}, \ \{\sigma^2\}, \ \{\sigma, \sigma^3\}, \ \{\tau, \sigma^2\tau\}, \ \{\sigma\tau, \sigma^3, \tau\}$$

    の 5 個あることが分かります。

  - **例 3：4 次対称群 S_4**　4 つの数字の置換のなす群です。この共役類は

    (1) の共役類、(12) の共役類、(123) の共役類、(12)(34) の共役類、(1234) の共役類

[1] 演習後のおはなしでは $g^{-1}ag$ と書いたと思います。どちらでも構いません（両辺の右から g、左から g^{-1} をかければよい）が、ここではみなさんのテキストに合わせて書くことにしましょう。

の 5 つですが、対称群 S_n の場合は直接求めるのではなく n **の分割**を使ってあげましょう（7/21 の講義）。この場合 $n=4$ ですから

$$4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$$

の 5 通りが考えられますが、これが上で与えた共役類の代表元の型（type）になっています。

- **Step.2：既約指標が何種類／何個あるのか数える**

  次は既約指標の個数を数えます。最終的に指標を具体的に作らないといけないのですから、その「目星」をつけるためでもあります。

  ここでは次が活躍します（6/30 分の今野先生の講義ノート参照）。

  定理 2　G の既約表現 π の同型類の集合を $\mathrm{Irr}(G)$ と書く。このとき

  $$|G| = \sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(G)} (\dim(\pi))^2$$

  定理 3　$|\mathrm{Irr}(G)|$ は G 内の共役類の数に等しい。

  既約指標は既約表現の数だけありますから、この 2 つの情報から、1 次の既約表現（つまり既約指標）が何個あるのか、2 次はどうか、ということが分かります。先ほどの例を使ってやってみましょう：

  – **例 1：Klein's four**　共役類は 4 つ、群の位数は 4 なので $n_i = (\dim(\pi_i))$ とおくと（整理するために $n_i \le n_{i+1}$ としておきます）

  $$4 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2$$

  となり、これを解けば $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ となります。つまり、V_4 の既約指標は 1 次のものが 4 個、それ以外にはない、ということですね。

  – **例 2：二面体群** D_4　共役類は 5 つ、群の位数は 8 なので

  $$8 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$$

  となり、これを解けば $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1,\ n_5 = 2$ となります。つまり、D_4 の既約指標は 1 次のものが 4 個、2 次のものが 1 個、計 5 個ということになります。

  – **例 3：4 次対称群** S_4　共役類は 5 つ、群の位数は 24 なので

  $$24 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 + n_5^2$$

  となり、これを解けば $n_1 = n_2 = 1,\ n_3 = 2,\ n_4 = n_5 = 3$ となります。つまり、S_4 の既約指標は 1 次のものが 2 個、2 次のものが 1 個、3 次のものが 2 個、計 5 個ということになります。

- **Step.3：指標表を作る**

  - **例 1：Klein's Four**　まず表の枠をかきます。共役類は 4 つ、指標も 4 つですから

	e	s	t	st
χ_1	1			
χ_2	1			
χ_3	1			
χ_4	1			

と割り当てておきましょう。**指標に単位元を入れた値はその指標の次元を表している**ことに注意してください。つまりいつでも $\chi(e) > 0$ になっています。この例では 1 次指標しかないのでタテに 1 がズラッと並ぶわけです。

まず一つ目は自明な表現を入れて

	e	s	t	st
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	a_2	a_3	a_4
χ_3	1			
χ_4	1			

となります。続いて χ_2 を決めましょう（上の緑色の部分）。ここで使うのが**指標の第 1 直交関係**だったのでした。

定理 4　$\langle \chi_\pi, \chi_{\rho^\vee} \rangle = \delta_{\pi,\rho},\ \pi, \rho \in \mathrm{Irr}(G)$

これと内積の定義から、次の 2 つの関係式が得られます。

* χ_1 と χ_2 は「直交」している。つまり $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$。ちゃんと書けば

$$\frac{1}{|V_4|}(1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot a_2 \cdot 1 + 1 \cdot a_3 \cdot 1 + 1 \cdot a_4 \cdot 1) = 0$$

それぞれの成分が 3 つの数の積になっていますが、これは順に「χ_1 の成分」「χ_2 の成分」「共役類の位数」を表しています。最後の「共役類の位数」は内積の定義から出て来る量で（内積は G 全体を渡る量なので、共役類の数だけ足さないといけない）、ここは計算していて忘れやすい所ですから十分注意しておいてください。

整理すれば $1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$ となります。

* χ_2 同士の内積をとると 1 になる。つまり $\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = 0$。ちゃんと書けば

$$\frac{1}{|V_4|}(1 \cdot 1 \cdot 1 + a_2 \cdot a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot a_4 \cdot 1) = 0$$

整理すれば $\frac{1}{4}(1 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) = 1$ となります。

この 2 つを解いて a_2, a_3, a_4 を求めるのですが、未知数 3 つに対して式は 2 つなので答えは複数あります。そのうち好きなものを一つ選んで、たとえば $a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = -1$ と解けるでしょう。

	e	s	t	st
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1			
χ_4	1			

続く χ_3 も同様にして

$$\langle\chi_1,\chi_3\rangle = 0,\ \langle\chi_2,\chi_3\rangle = 0,\ \langle\chi_3,\chi_3\rangle = 1$$

を解けば OK です。以上をまとめておしまいですね。

	e	s	t	st
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1

– **例 2：二面体群** D_4　これは直接求めることも出来ますが、少し大変かもしれません。そこで少しラクをするために次の定理をつかってみるのです。

定理 5　G を有限群、$D(G)$ を交換子群、$\pi:\ G \to G/D(G)$ を標準的準同型写像とする。G の 1 次の指標 は、可換群 $G/D(G)$ の既約指標 χ_0 と π の合成写像 $\chi = \chi_0 \circ \pi$ として与えられる。

これは演習中で皆さんも使っていましたが、欲を言えば証明できるようになっていると良いかもしれませんね（テキスト p.83：そんなに難しくはありません）。

ついでに交換子群の定義もしておきましょう：

定義 6　$x, y \in G$ に対し

$$D(G) = \left\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid\ x, y \in G \right\rangle$$

で定義される（$xyx^{-1}y^{-1}$ の形の元で生成される）群を G の**交換子群**とよぶ。これは G の正規部分群となっている。

さて、この定理を使うと、小さな群の既約指標が分かっている場合、これを使ってより大きな群の既約指標を求めることができます。昨日やってみせましたが（ただし一部分だけ）、$D(G)$ の交換子群は $D(D_4) = \left\langle \sigma^2 \right\rangle = \left\{ e, \sigma^2 \right\}$ となるため[2]、

$$|D_4/D(D_4)| = \frac{|D_4|}{|D(D_4)|} = \frac{8}{2} = 4$$

となります。ところで、位数 4 の群といえば $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$（位数 4 の巡回群）か $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（位数 2 の巡回群の直積）のどちらかに同型だったのでした。これを判定するには、D_4 の元の位数が「$D_4/\left\langle \sigma^2 \right\rangle$ 上で考えて」いくつなのかを計算すれば良く、実際にやってみせた通り、e と σ^2 が位数 1、その他の 6 個はすべて位数 2 になります。$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ になるには 1 つでも位数 4 の元が必要ですから、結局 $D_4/D(D_4)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることが分かりました。

その一方で例 1 を思い出してみると、V_4 も実は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に同型であることが確かめられます（先ほどと同様：e 以外はすべて位数 2）。つまり、この指標表はすでに計算済みなのですから、この結果を使うことができますね。

[2] これは今の例が $n = 4$ の場合、つまり偶数の場合です。例えば $n = 5$ にしてみると $D(D_5) = \langle\sigma\rangle$ というふうに少し大きくなってしまいます。このように $D(G)$ が大きくなるほど $G/D(G)$ は小さくなるので、計算もラクになります。演習問題 10-7 で D_n の既約指標を求める問題がありましたが、偶数よりも奇数のほうがシンプルになるのはこのような事情も絡んでいるのです。

- **Step.3（続き）**

  - **例 2（続き）** というわけで、ここまでで分かるものを指標表に埋めてみましょう。

	e	σ^2	σ, σ^3	$\tau, \sigma^2\tau$	$\sigma\tau, \sigma^3\tau$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	a_2	a_3	a_4	a_5

最初の e と σ^2 は標準的準同型 π に通したとき同じ元に移ることから、同じ値をとるわけですね。

さて、**ここまでで定理 5 の役目は終了です。**この定理は **1 次の指標**にしか使うことが出来ないので、後は再び計算をしていくほかないのです。しかしここまで出来たらあとは例 1 のときと同じで

$$\langle \chi_1, \chi_5 \rangle = \langle \chi_2, \chi_5 \rangle = \langle \chi_3, \chi_5 \rangle = \langle \chi_4, \chi_5 \rangle = 0, \ \langle \chi_5, \chi_5 \rangle = 1$$

を解けばよいことになります。例えば

$$\langle \chi_3, \chi_5 \rangle = \frac{1}{8}(1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot a_2 \cdot 1 + (-1) \cdot a_3 \cdot 2 + 1 \cdot a_4 \cdot 2 + (-1) \cdot a_5 \cdot 2) = 0$$

という感じになりますね。後ろ 3 つについている 2 に注意してください。以上より $a_2 = -2$, $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ と計算出来て、指標表が完成します。

	e	σ^2	σ, σ^3	$\tau, \sigma^2\tau$	$\sigma\tau, \sigma^3\tau$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

  - **例 3：4 次対称群** S_4　これはもうちょっと複雑です。が、書く時間がなくなってきました（笑）がんばってみてください。

結果だけは「おぼえ書きファイナル」にも載せましたし、いくつかの本には具体的な計算の仕方が載っていますので、参考にしてみてください。

また、テキストの章末問題のいくつかの例で練習してみるのも良いかもしれませんね。