Q2.7　　$\begin{array}{l} X : \text{left } R\text{-module} \\ \cup \\ M, N : R\text{-submodule} \end{array}$

$M+N,\ M\cap N$: finitely generated $\Longrightarrow$ M, N : finitely generated.

（テキストの方法に沿ってみます）

完全列：

$$0 \longrightarrow M\cap N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/(M\cap N) \longrightarrow 0$$

を考える．

（ここで．$f : \begin{array}{ccc} M\cap N & \longrightarrow & M \\ \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & a \end{array}$ は埋め込み 

$g : \begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M/(M\cap N) \\ \Psi & & \Psi \\ a & \longmapsto & a(M\cap N) \end{array}$ 標準的準同型（単に mod $(M\cap N)$ する)）

ここで次を使う：

$$M/(M\cap N) \cong (M+N)/N$$

注）上は「(環の)第2同型定理」と呼ばれるものです．
（代数Aテキストの p.26 にあるものを．加法を演算としているバージョンと考えてください．

pf.）合成写像

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & M+N & \longrightarrow & (M+N)/N \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ x & \longmapsto & x & \longmapsto & xN \end{array}$$

変化なし

Mの元のうちNにも含まれているものの集合．
これらはNで割ると0になる！

を考えるとこれは全射で　Ker は　$M\cap N$ になる．

∴ 準同型定理より．同型

$$M/\underset{\substack{\| \\ M\cap N}}{\mathrm{Ker}} \cong \mathrm{Im} = (M+N)/N$$

を引きおこす．）

$M+N$ が有限生成より、$(M+N)/N$ も有限生成. (*) ②

∴ $M/(M\cap N)$ も有限生成. よって前問 (Q.2.6) を使って

$M\cap N$, $M/(M\cap N)$ が共に有限生成 $\Longrightarrow$ M : 有限生成 //

N についても同様. M と N の役割を入れかえれば OK.

ここまで

(*) の部分について:

「 X : finitely generated $\Longrightarrow$ X/Y : finitely generated 」

意味 $X = \{ r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n \mid r_i \in R,\ a_i \in X \}$

これに対し、X/Y の元は各 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を mod Y して得られる. つまり、$r_1(a_1Y) + r_2(a_2Y) + \cdots + r_n(a_nY) \in X/Y$ というカタチになる.

この時 $\{a_1Y, a_2Y, \cdots, a_nY\}$ が $(R-)$線形独立かどうかは分からないが、線形独立なもの (= 基底としてとれるもの) は n 個以下. (← 加群を拡大したりしているわけではないので)

∴ X/Y は高々 n 個の基底 $\{b_1, \cdots, b_r\}$ ($r \leq n$, $b_i \in X/Y$) で生成される. ∴ X/Y も finitely generated.

Rem 一般に $f : X \longrightarrow Y$ が準同型で、X が有限生成なら $\mathrm{Im} f$ も有限生成. つまり f が全射だったら $Y (= \mathrm{Im} f)$ が有限生成. この問題では標準的準同型 $X \to X/Y$ ゆえ明らかに全射.

簡単な例 $X = R = \mathbb{Z}$, $M = 3\mathbb{Z}$, $N = 6\mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ $M+N = 3\mathbb{Z}$, $M\cap N = 6\mathbb{Z}$

$$\therefore\ (M+N)/N = 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$ ← finitely generated

(1行で生成される)