Q5.9 (1) F-isom. (☆)

$$\mathrm{Hom}_F(V, W)\otimes_F \mathrm{Hom}_F(V', W') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_F(V\otimes_F V', W\otimes_F W')$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi : V \to W \\ \varphi' : V' \to W'\end{array}\right) \xrightarrow[\text{Prop.}]{} {}^{\exists 1}\varphi\otimes\varphi' : V\otimes V' \to W\otimes W'$$

s.t. $(\varphi\otimes\varphi')(v\otimes v') = \varphi(v)\otimes\varphi'(v')$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_F(V, W)\times \mathrm{Hom}_F(V', W') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_F(V\otimes V', W\otimes W') \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\varphi, \varphi') & \longmapsto & \varphi\otimes\varphi' \end{array}$$

は F-bilinear. 上の写像を $\tilde{f}$ と書くことにする.

さて,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_F(V, W)\times \mathrm{Hom}_F(V', W') \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{f}"'] & \mathrm{Hom}_F(V, W)\otimes_F \mathrm{Hom}_F(V', W') \arrow[d, dashed, "{}^{\exists}\mathbb{F}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ (\varphi, \varphi') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_F(V\otimes V', W\otimes W') \\ & \varphi\otimes\varphi' \end{tikzcd}$$

$\tilde{f} = \mathbb{F}\circ f$ となる

という図式に対し, F-linear $\mathbb{F}$ が存在する. これが同型であることを示せば良い. (テンソル積の普遍性).

まず, $\mathrm{Im}\,\tilde{f} \subset \mathrm{Im}\,\mathbb{F}$ で $\mathrm{Im}\,\tilde{f}$ は $\mathrm{Hom}_F(V\otimes V', W\otimes W')$ を生成しているので, $\mathrm{Im}\,\mathbb{F} = \mathrm{Hom}_F(V\otimes V', W\otimes W')$ がわかる.

更に $\dim_F(\mathrm{Hom}_F(V, W)\otimes_F \mathrm{Hom}_F(V', W'))$
$= \dim_F(\mathrm{Hom}_F(V\otimes V', W\otimes W'))$.

よって, $\mathbb{F}$ は同型写像となり, 主張(☆)がいえる. //

(※ Comment: もう少し clear にできる…??)

(2) V. $(v_j)_{1\le j\le n}$. W $(w_j)_{1\le j\le m}$ ②

V'. $(v'_j)_{1\le j\le n'}$ W' $(w'_j)_{1\le j\le m'}$

$\varphi: V \to W$ $\varphi': V \to W'$

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(F)$ $A' = (a'_{ij}) \in M_{m',n'}(F)$

$\varphi(v_1 \cdots v_n) = (w_1 \cdots w_m) A$ $\varphi'(v'_1 \cdots v'_{n'}) = (w'_1 \cdots w'_{m'}) A'$

↓ これを例にとって考える.

$$\varphi(v_1 \cdots v_n) = (w_1 \cdots w_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \left(\sum_k a_{k1} w_k, \cdots, \sum_k a_{kn} w_k\right)$$

$\therefore$ $\varphi(v_i) = \sum_k a_{ki} w_k$. 同様に $\varphi'(v'_j) = \sum_l a'_{lj} w'_l$

よって.

$$(\varphi\otimes\varphi')(v_i\otimes v'_j) = \varphi(v_i)\otimes\varphi'(v'_j) = \sum_k\sum_l a_{ki}a'_{lj}(w_k\otimes w'_l)$$ となるから.

$$(\varphi\otimes\varphi')(\underbrace{v_1\otimes v'_1,\ v_1\otimes v'_2, \cdots, v_2\otimes v'_1 \cdots\cdots}_{\text{全部で } nn' \text{ 個}})$$

$$= (\underbrace{w_1\otimes w'_1,\ w_1\otimes w'_2, \cdots, w_2\otimes w'_1 \cdots}_{\text{全部で } mm' \text{ 個}})\begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} & a_{11}a'_{12} & \cdots \\ a_{11}a'_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= (w_1\otimes w'_1,\ w_1\otimes w'_2, \cdots, w_2\otimes w'_1 \cdots)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}A' & a_{12}A' & \cdots & a_{1n}A' \\ a_{21}A' & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}A' & \cdots & \cdots & a_{mn}A'\end{pmatrix}}_{mm'\times nn' \text{ 行列}}$$

これが $A\otimes A'$ を表す.

(注 $a_{11}A'$ で1つの行列のブロック $\begin{pmatrix} a_{11}a'_{11} & \cdots & a_{11}a'_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}a'_{m'1} & \cdots & a_{11}a'_{m'n'}\end{pmatrix}$ を表す.

全て成分表示すると大変なので書き方を工夫する!!)