Q7-8　F-algebra の同型

$$\iota : \Lambda(V) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^r(V) \ni \sum_{r=0}^{n} \omega_r \longmapsto \sum_{r=0}^{n} (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \omega_r \in \Lambda(V)^{op}.$$

F-hom はすぐ分かる．更に F-algebra として同型となるには．
環として同型．即ち．$t \in \Lambda^r(V)$．$t' \in \Lambda^{r'}(V)$ に対し

$$\underbrace{\iota(t \wedge t')}_{\Lambda(V)\text{の積}} = \underbrace{\iota(t') \wedge \iota(t)}_{\Lambda(V)^{op}\text{の積}}$$ を check：☆

$$\iota(t \wedge t') = (-1)^{\frac{(r+s)(r+s-1)}{2}} (t \wedge t')$$

$$\begin{aligned}
\iota(t') \wedge \iota(t) &= (-1)^{\frac{r'(r'-1)}{2}} (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} (t' \wedge t) \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}r'(r'-1)} (-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)} (-1)^{rr'} (t \wedge t') \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(r'^2 - r' + r^2 - r + 2rr')} (t \wedge t') \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}\{(r+r')^2 - (r+r')\}} (t \wedge t')
\end{aligned}$$

イコール．

OK．

後は F-hom が全単射であることを示せばOK．

単　$\iota(t) = \iota(t') \Longrightarrow t = t'$ を示しても良いし．$\iota \circ \iota = id$．
であることを考えればすぐ従う．

全　$\forall \sum \omega_r$ $(\in \Lambda(V)^{op})$ に対して　$\sum (-1)^{\frac{r}{2}(r-1)} \omega_r \in \Lambda(V)$ を対応させれば

$$\iota\left(\sum (-1)^{\frac{r}{2}(r-1)} \omega_r\right) = \sum \omega_r$$ となるので OK．

（☆ の部分：正確には t や t' は $\sum \omega_r$．$\sum \omega_{r'}$ で計算する．
各パーツ毎の計算は上でやったので．それを足すだけ．）

注　正確には $\Lambda(V)$ と $\Lambda(V)^{op}$ は別物と考える．
つまり．$\iota \circ \iota = id$ の部分は区別して $\left(\begin{array}{l} \iota \circ \tilde{\iota} = id \\ \tilde{\iota} \circ \iota = id \end{array}\right)$

$$\iota : \Lambda(V) \ni \sum \omega_r \mapsto \sum (-1)^{\frac{r}{2}(r-1)} \omega_r \in \Lambda(V)^{op}.$$

$$\tilde{\iota} : \Lambda(V)^{op} \ni \sum \omega_r \mapsto \sum (-1)^{\frac{r}{2}(r-1)} \omega_r \in \Lambda(V)$$

と書くべきかもしれませんね．