Q9.7 $\quad (\rho, V) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} (\rho_i, V_i)^{\oplus m_i} \quad V_i \not\simeq V_j \ (i \neq j)$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{End}_G(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C})$$

(途中までは同じ)

$$\mathrm{End}_G(\rho, V) = \mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathrm{Hom}_G\left(\bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\oplus m_i}, \bigoplus_{j=1}^{r} V_j^{\oplus m_j}\right)$$

($\mathrm{End}_G(V)$ とかく.
本来 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}$ で G-作用と可換なもの.)

(Schur の補題から. $\mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus m_i}, V_j^{\oplus m_j})$
$(i \neq j)$ は消えてしまう. (テキスト prop.3.3.1))

$$= \bigoplus_{i=1}^{r}\bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus m_i}, V_j^{\oplus m_j}) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_G(V_i^{\oplus m_i}, V_i^{\oplus m_i})$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} \left(\mathrm{Hom}_G(V_i, V_i)^{\oplus m_i^2} \right) = \bigoplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathrm{End}_G(V_i)).$$

m_i^2 個の直和 → m_i 次正方行列の成分とみなす.

後は $\underline{\mathrm{End}_G(V_i) \cong \mathbb{C}}$ を示せばOK.

$$\mathrm{Hom}_G(V_i, V_i) = \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i, V_i) \mid \rho_i(g) \circ f = f \circ \rho_i(g),\ {}^{\forall} g \in G \}$$

$(\mathrm{End}_G(V_i))$

~~テキスト th.3.3.3~~

$$= \{ \lambda\, id_{V_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_i, V_i) \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$$

$$\cong \mathbb{C} \quad (\swarrow(\lambda\text{倍する}) \to \lambda \in \mathbb{C} \text{ で対応.})$$

授業でやりました

$(\mathrm{End}_G(\rho) = F)$

$$\therefore \ \mathrm{End}_G(\rho, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C}) \ //$$

~~※ テキストの th.3.3.3 を使うなら pf が必要?~~

2009. 6. 30 (Tue)