Q10-3 $\qquad F=\mathbb{C} \qquad G \curvearrowright \text{rep.}\ (\pi, V) \qquad |G|<\infty$

inner prod. $(\ ,\ ): V\times V \longrightarrow \mathbb{C}$ で次をみたす...

- $f(v, v')$ : $V$ 上の(任意の)内積とする. $(V\times V \longrightarrow \mathbb{C})$

これを使って,

finite

$$\tilde{f}(v, v') := \sum_{g'\in G} f(\pi(g')v, \pi(g')v')$$

と $\tilde{f}$ を def すると. $\tilde{f}$ も $V$ 上の内積 $(\tilde{f}: V\times V \longrightarrow \mathbb{C})$

このとき.

$$\tilde{f}(\pi(g)v, \pi(g)v') = \sum_{g'\in G} f(\pi(g')\pi(g)v, \pi(g')\pi(g)v')$$

$$= \sum_{g'\in G} f(\pi(g'g)v, \pi(g'g)v')$$

※ G は finite で G 全体にわたる和をとっていることに注意!

$$= \sum_{g'\in G} f(\pi(g')v, \pi(g')v')$$

$$= \tilde{f}(v, v')$$

∴ $\tilde{f}$ が求める内積

"π は Unitary rep."

(Positive-Definite Herimite 内積)

- 上の状況で (π が unitary)

$$\chi_{\pi^\vee}(g) = \mathrm{Tr}(\pi^\vee(g)) = \mathrm{Tr}({}^t\pi(g^{-1}))$$

※ check

$$= \mathrm{Tr}(\pi(g^{-1})) = \mathrm{Tr}({}^t\overline{\pi(g)}) = \mathrm{Tr}(\overline{\pi(g)})$$

※ check.

$$= \overline{\chi_\pi(g)} \quad //$$

※ Fact $\qquad$ finite dim-rep over $\mathbb{C}$ $\Longleftrightarrow$ unitary rep.