Q5.3（テンソル積の例）補足

2009. 7. 25 (Sat)

◎ テンソル加群の求め方は大きく分けて2つある： 例として

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \qquad (d = \gcd(m.n))$$

を計算してみよう.

(I)　今野先生の webページ／「おぼえ書き」その7 の方法.

$$\Phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad を考える.$$

$$(\underset{\bmod m}{\overline{x}}, \underset{\bmod n}{\overline{y}}) \longmapsto \underset{\bmod d}{\overline{xy}}$$

（※ 直積になおして考えるのがポイント）

これは well-defined な $\mathbb{Z}$ - 双線形写像.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "\Phi"'] & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[d, dashed, "\phi", shift left] \\
 & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[u, dashed, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

テンソル積の普遍性より, $\exists \phi : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$ - 準同型 が引き起こされる（存在する）. 続いて ϕ が同型であることを示すため, ϕ の逆写像を作る.

$$\psi : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\underset{\bmod d}{\overline{x}} \longmapsto \underset{\bmod m}{\overline{x}} \otimes \underset{\bmod n}{\overline{1}}$$

と定義すると, これは well-defined な $\mathbb{Z}$ - 準同型.

これは次の性質を使う: $d = \gcd(m.n)$ とする. $\exists a.b \in \mathbb{Z}$ s.t.

$$am + bn = d$$

が成り立つ（(i) では $(m.n) = 1$ で $am + bn = 1$ を使った）

後は $\phi \circ \psi = id_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, $\psi \circ \phi = id_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ を示せば ϕ が同型であることがわかる.（上の id は「おぼえ書き」を参照） //

さて、逆写像を求めるのが困難だったり, 他の方法を試したいときは次のように求めることもできる.

(II)　テンソル積の普遍性を使う：　ちょっと復習

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "{}^{\forall}F"'] & (\quad\quad) \arrow[d, dashed, "{}^{\exists}f"] \\ & {}^{\forall}U \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}$-加群　$\mathbb{Z}$-双線形.

↓　　↓

${}^{\forall}U$, ${}^{\forall}F$ に対して f：$\mathbb{Z}$-準同型 が 同型を除いて唯一つ存在する というのがテンソル積の普遍性だった。そこで ( ) に入るものは全て同型なので、まとめて "$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$" と書いたのだ、と考えるとよい。

つまり、欲しい答えを ( ) に入れて普遍性をみたすことが言えれば、自動的にこれは $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型であることが示せる。

まず、先の(I)と同じ　Φ：$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$　をとり、

$$(\overline{x}, \overline{y}) \longmapsto \overline{xy}$$

$\overline{x}$：mod m，$\overline{y}$：mod n，$\overline{xy}$：mod d

well-defined な $\mathbb{Z}$-双線形写像であることを示す。よって、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "{}^{\forall}F"'] & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \arrow[d, "{}^{\exists}f\ ?"] \\ & {}^{\forall}U \end{tikzcd}$$

上のように任意に $\mathbb{Z}$-双線形 F と $\mathbb{Z}$-加群 U をとる。このとき上の図式が可換となるような $\mathbb{Z}$-準同型 f：$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \longrightarrow U$ が唯一つ存在することを示す。

- まず、このような f は存在すればただ1つしかない。もし存在したとすると、図式が可換であることから

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \ni \overline{x} \ (\mathrm{mod}\ d) \arrow[d, "f"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$$(\overline{x}, \overline{1}) \longmapsto \overline{x}, \qquad (\overline{x}, \overline{1}) \longmapsto F(\overline{x}, \overline{1}) =: f(\overline{x})$$

$\overline{x}$：mod m，$\overline{1}$：mod n

というように、Fを使って行き先が決まってしまうからである。

ということは、残るは f が well-defined な $\mathbb{Z}$-準同型であること：

$$f(\bar{x}) = F(\bar{x}, \bar{1})$$

が well-defined であることは

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \quad \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$$

を示せば良いので $x \equiv x + kd \pmod{d}$ に注意すれば

$$F(\bar{x}, \bar{1}) = F(\overline{x+kd}, \bar{1})$$

が言えれば OK. そこで (I) でも使った事実：

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad am + bn = d$$

を使えば、

$$\begin{aligned}
F(\overline{x+kd}, \bar{1}) &= F(\overline{x+k(am+bn)}, \bar{1}) \\
&= F(\overline{x+kam+kbn}, \bar{1}) \\
&= F(\overline{x+kbn}, \bar{1}) && (\text{mod } m \text{ ゆえ } m \text{ の項が消える}) \\
&= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kbn}, \bar{1}) && (\mathbb{Z}\text{-双線形}) \\
&= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kb}, \bar{n}) && (\mathbb{Z}\text{ の元はうつり合える}) \\
&= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kb}, \bar{0}) && (\text{mod } n \text{ ゆえ } n \text{ の項が消える}) \\
&= F(\bar{x}, \bar{1})
\end{aligned}$$

と示せる。

続いて f が $\mathbb{Z}$-準同型であることも定義からすぐ確かめられる。よって、$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \Phi)$ は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$ 上テンソル積の普遍性をみたす。

即ち、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ //

※

（どちらかを使えば、だいたいの（カンタンな）テンソル加群の構造を求めることができると思います。
これは、文字が増えても（抽象度が増えても）同じことです。）