

① テンソル加群の求め方は大きく分けて2つある: 例として

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad (d = \gcd(m, n))$$

を計算してみよう.

(I) 今野先生の web ページ / 「おぼえ書き」 その7 の方法.

$$\Phi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \quad \text{を考慮.}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \\ (\bar{x}, \bar{y}) & \longmapsto & \overline{xy} \\ \uparrow \quad \uparrow & & \uparrow \\ \text{mod } m & & \text{mod } n & & \text{mod } d \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} \text{直積に} \\ \text{おぼえ書き} \\ \text{のバリエーション} \end{array} \right)$$

これは well-defined かつ  $\mathbb{Z}$ -双線形写像.

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & \\ & \Phi & \\ & & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \end{array} \quad \left( \begin{array}{l} \text{直積} \\ \text{のバリエーション} \end{array} \right)$$

テンソル積の普遍性より,  $\exists \phi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} : \mathbb{Z}$ -準同型

が引き起こされる (存在あり). 続いて  $\phi$  が同型であることを示すため.

$\phi$  の逆写像を証明.

$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \\ \bar{x} & \longmapsto & \bar{x} \otimes \bar{1} \\ \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ \text{mod } d & & \text{mod } m \quad \text{mod } n \end{array}$$

と定義すると, これは well-defined かつ  $\mathbb{Z}$ -準同型.

これは次の性質を使う:  $d = \gcd(m, n)$  とあり,  $\exists a, b \in \mathbb{Z}$  s.t.

$$am + bn = d$$

が成り立つ (ii)  $\mathbb{Z}$  は  $(m, n) = 1$   $\mathbb{Z}$   $am + bn = 1$  を使った)

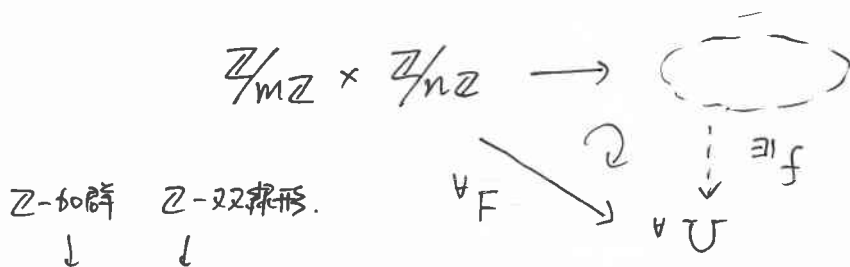
後は  $\phi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ ,  $\psi \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$  を示せば  $\phi$  が同型である

ことがわかる. (上の id は「おぼえ書き」を参照) //

また, 逆写像を求めると困難だったり, 他の方試したいときは次のように求めるともできる.



(II) テンソル積の普遍性を使う: ちよと復習



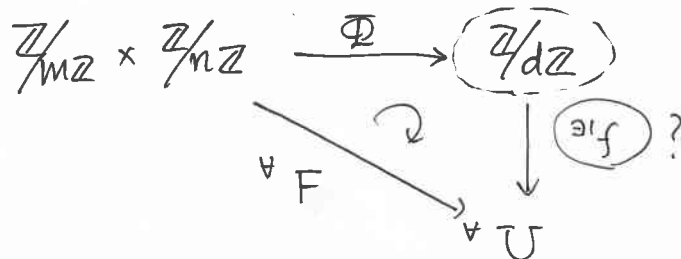
$\forall U, \forall F$  に対し  $f: \mathbb{Z}$ -準同型 或 同型を除いて唯一つ存在する  
 というのがテンソル積の普遍性だった。そこで  $(\text{---})$  に入るものは全  
 同型なので、手短めに " $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ " と書いたのだ。と考えるとよい。

つまり、欲しい答えを  $(\text{---})$  に入れれば普遍性で済むことが言える。自動的に  
これは  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  に同型であることを示せる。

すなわち、先の(I)と同じ  $\Phi: \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  として、

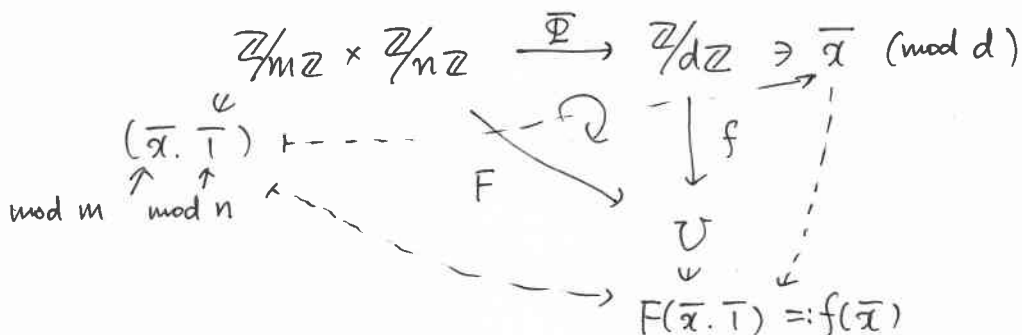
$$\begin{array}{ccc}
 (\bar{x}, \bar{y}) & \longmapsto & \overline{xy} \\
 \text{mod } m & \text{mod } n & \text{mod } d
 \end{array}$$

well-defined かつ  $\mathbb{Z}$ -双線形写像であることと示す。すなわち、



上のように任意に  $\mathbb{Z}$ -双線形  $F$  と  $\mathbb{Z}$ -加群  $U$  をとり、このとき上の図式が  
 可換となるような  $\mathbb{Z}$ -準同型  $f: \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow U$  が唯一つ存在することと示す。

すなわち、このような  $f$  は存在すれば ただ1つしかない。もし存在したとすると、  
 図式が可換であることから、



というように、 $F$  を使えば行先が決められ、2行目から示せる。

というときは、残数は  $f$  が well-defined かつ  $\mathbb{Z}$ -準同型 であること:

$$f(\bar{x}) = F(\bar{x}, \bar{1})$$

が well-defined であることは

$$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \bar{x} = \bar{y} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{y})$$

を示すには良いのは  $x \equiv x + kd \pmod{d}$  に注意すれば

$$F(\bar{x}, \bar{1}) = F(\overline{x+kd}, \bar{1})$$

が言えるのは OK.  $\forall z \in (\mathbb{I})$   $z$  も使った事実:

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } am + bn = d$$

を使えば,

$$\begin{aligned} F(\overline{x+kd}, \bar{1}) &= F(\overline{x+k(am+bn)}, \bar{1}) \\ &= F(\overline{x+kam+kbn}, \bar{1}) \\ &= F(\overline{x+kbn}, \bar{1}) \quad \downarrow \begin{array}{l} \text{mod } m \text{ 中の } m \text{ の項が} \\ \text{消える.} \end{array} \\ &= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kbn}, \bar{1}) \quad \downarrow \mathbb{Z}\text{-双線形.} \\ &= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kb}, \bar{n}) \quad \downarrow \mathbb{Z} \text{ の元は } \forall \text{ 場合} \\ &= F(\bar{x}, \bar{1}) + F(\overline{kb}, \bar{0}) \quad \downarrow \begin{array}{l} \text{mod } n \text{ 中の } n \text{ の項が} \\ \text{消える} \end{array} \\ &= F(\bar{x}, \bar{1}) \quad \text{と示せる.} \end{aligned}$$

結局  $f$  が  $\mathbb{Z}$ -準同型 であることも定義からすぐ確かめられる. よって,

$(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \oplus)$  は  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}$  上テンソル積の普遍性である.

$$\text{即ち. } \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} //$$

\*  
どちらかを使えば、だいたいの (カンファレンス) テンソル加群の構造を求めるとき  
がでまると思える。  
これは、文字が増えても (抽象度が増えても) 同じことだ。