

小テスト解説資料5 11月10日(火)実施分

担当 TA: 横山 俊一(九州大学大学院数理学府:修士2年)

答案は次回の講義で返却してもらう予定です。資料の不備等ございましたら横山までご一報ください。

問題と解答例 10点満点

1. 次の行列が簡約でない理由を述べて(各2点)簡約化せよ(各2点)。また階数を求めよ(各1点)。

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

実は前回(小テスト4)の問2と同一問題

簡約でない理由: 以下のような記述が一つ以上あればよい。

- 零ベクトルでない行ベクトルの主成分が1でない。
- 各行の主成分がすべて第1列にある。
- 主成分を含む列の他の成分が全て0になっていないものがある(例えば第1行)。

上は順番に、テキスト p.23 の「簡約な行列の性質」(II),(III),(IV)に反します。

解答する際は「性質(*)」の内容も日本語できちんと書きましょう。テキストが無いと何を言っているのか伝わらないですね。

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 行目と } 2 \text{ 行目の入れかえ, } 1 \text{ 行目} \times (-1)) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 行目} - 1 \text{ 行目} \times 4) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ 行目} \times \left(-\frac{1}{3}\right)) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ 行目} - 2 \text{ 行目}) \end{aligned}$$

行列の階数(rank)は2

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} && \text{(1行目と3行目の入れかえ)} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 16 \end{bmatrix} && \text{(2行目+1行目, 3行目+1行目} \times 4) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 12 & 16 \end{bmatrix} && \text{(2行目} \times (-1)) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{bmatrix} && \text{(3行目-2行目} \times 2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} && \text{(3行目} \times \frac{1}{22}) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} && \text{(1行目-3行目} \times 3, 2行目+3行目 \times 5) \end{aligned}$$

行列の階数 (rank) は 3

コメント

- 実は前回の問題と同じでした。というわけで、計算ミスには部分点を与えていません。ちなみに今回は「簡約でない理由」をきちんと書けるかどうかを重視して、高配点にしました。いくつか日本語としておかしいもの¹や、理由になっていないものは減点しましたが、それでも皆さんなかなか良く書けていました。
- 簡約化が途中で止まってしまっている答案がちらほら見受けられました(勘違い?)。例えば(2)で

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

までで止まっていますが、これは第3行の主成分を含む列(つまり第3列)に0でない成分があるため、性質(IV)に反します。単なる階段行列との違いに注意してくださいね。

それでは、次回もがんばってください!

¹何を言いたいのかはそれとなく伝わってきますが、今回は練習なので辛抱しましょう。