

小テスト解説資料6 11月17日(火)実施分

担当 TA: 横山 俊一(九州大学大学院数理学府:修士2年)

答案は次回の講義で返却してもらう予定です。資料の不備等ございましたら横山までご一報ください。

問題と解答例

10点満点

1. 次の連立方程式がただ一つの解をもつかどうか答えよ(2点)。また持つ場合はその値も求めよ(簡約化の計算も含めて8点)。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- 上の連立方程式はただ一つの解をもつ。

理由:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$  とした時、 $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3$  が成り立つ。

これが  $Ax = b$  に解がただ一つ存在するための必要十分条件(テキスト p.31 の定理 2.3.2)。

- 拡大係数行列  $[A|b]$  を簡約化(基本変形)する。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \end{bmatrix} & (2 \text{ 行目} - 1 \text{ 行目}, 3 \text{ 行目} - 1 \text{ 行目} \times 2) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \end{bmatrix} & (2 \text{ 行目} \times \left(-\frac{1}{3}\right)) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} & (1 \text{ 行目} - 2 \text{ 行目}, 3 \text{ 行目} + 2 \text{ 行目} \times 3) \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} & (2 \text{ 行目} + 3 \text{ 行目}) \end{aligned}$$

上で述べた理由より、この連立方程式はただ一つの解

$$\underline{x = 4, y = -7, z = -8}$$

をもつ。

## コメント

- これを書いている現在（19日）、全学キャンパスでは学祭の準備で大賑わいのようです。参加される方は楽しい週末になるよう、頑張ってください。  
但し、来週もしっかり小テストがありますので、気を抜き過ぎないように注意ですね（笑）。
- 今回は問題が一問だけだった為、配点が all or nothing で点差が開いてしまいました。ほとんど無得点になってしまった方もいらっしゃいましたが、あまり気にせず、次回は正解出来るように復習をお願いしますね。
- 採点にあたって、「ただ一つの解をもつかどうか」にきちんと言及していない答案是1点減点しました（本来の配点は2点。1点はおまけ）。拡大係数行列を簡約化すると1組の解が得られますが、だからといって「解はそれだけとは限らない」ので注意しましょう。行列のランクに関する言及：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{とした時、rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3$$

が一言欲しいところです。

- 「自明な解 (trivial solution)」というのは  $x = 0$ （ここでは成分がすべて0の意味）という解のことをさします。簡約化された拡大係数行列を眺めると解が一目瞭然ですが、このことを「自明である」と言っているわけではありませんので、お間違えなきよう。ここで登場する解は立派な「非自明な解 (non-trivial solution)」です。

それでは、次回もがんばってください！