余因子行列を用いた逆行列の計算　11 月 24 日（火）実施分の補足

担当 TA： 横山 俊一（九州大学大学院数理学府：修士 2 年）

※「小テスト解説資料 7」補足資料です。

第 7 回小テストでは拡大係数行列を簡約化（基本変形）することで逆行列を計算したが、別解として**余因子行列**（adjoint[1]）を用いて計算する方法もある。後に習うかもしれないが、この機会に紹介しておこう。テキスト 3.4 節により詳しい解説があるので、そちらも参照されたい。

n 次正方行列 $[a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列とを取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書く。即ち A_{ij} は以下のように緑字の部分を除いて得られる。

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

定義　n 次正方行列 $[a_{ij}]$ に対し

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}\,|A_{ji}|$$

とおく（a^*_{ij} の添字と A_{ji} の添字が逆になっていることに注意 !! ）。このとき

$$\tilde{A} = [a^*_{ij}]$$

を A の**余因子行列**（adjoint）と呼ぶ。

余因子行列に関して次の 2 つが成り立つ（テキストの定理 3.4.1 &定理 3.4.2)。

定理 1　正方行列の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E$$

定理 2　$(\det A) \neq 0$ ならば A は正則であって

$$A^{-1} = \frac{1}{(\det A)}\tilde{A}$$

[1]余因子は英語で cofactor であるが、余因子行列は cofactor matrix とは言わないのが慣例である。

小テスト 7：問題と別解

1. 次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

まず $(\det A) = 6 + 40 - 15 - 32 = -1$ である[2]。続いて余因子行列（の各成分）を計算すると

- $a^*_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -13$
- $a^*_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$
- $a^*_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 40$
- $a^*_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$
- $a^*_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$
- $a^*_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -16$
- $a^*_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$
- $a^*_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$
- $a^*_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9$

よって定理 2 から

$$\underline{A^{-1} = \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} -13 & -5 & 40 \\ 5 & 2 & -16 \\ 3 & 1 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & -40 \\ -5 & -2 & 16 \\ -3 & -1 & 9 \end{bmatrix}}.$$

[2] ここでは Sarrus の公式を用いたが、ここで紹介している余因子行列を用いても計算出来る（同じくテキスト 3.4 節を参照のこと）。因みに、一般に行列の次数が大きい場合（例えば $n = 4, 5$ のとき）は Sarrus の公式のような便利な公式は無く、行列式の定義

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

から直接計算することも実用的とは思えない。そのため余因子展開（cofactor expansion）を用いて、次数の小さな行列（$n = 2, 3$）の行列式の計算に帰着させた後 Sarrus の公式でやっつける、という手法が一般的である。