小テスト解説資料 8　**12 月 1 日（火）実施分**

担当 TA： 横山 俊一（九州大学大学院数理学府：修士 2 年）

答案は次回の講義で返却してもらう予定です。資料の不備等ございましたら横山までご一報ください。

お知らせ

- 12 月 5 日（土）から 17 日（木）まで横山は東大出張（第 2 週）と合同国際会議（第 3 週）のため不在です。そのため、**12 月 8 日・15 日実施分の小テストは、来年初回の講義（2010 年 1 月 12 日）にて返却**してもらう予定です。なお、解説資料は年内には web 上に公開出来ると思います。ご迷惑をお掛け致しますが、何卒御容赦願います。

問題と解答例　10 点満点

1. 次の行列の行列式の値を Sarrus の方法とそれ以外の複数の方法で求めよ（各 5 点）。

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

- Sarrus の方法で求めると

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot(-1)+6\cdot 2\cdot 1+1\cdot 5\cdot 4-1\cdot(-3)\cdot 1-5\cdot 6\cdot(-1)-2\cdot 4\cdot 2=\underline{55}$$

- それ以外の方法：行列式の性質（テキスト定理 3.2.1）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を使って求めてみよう。

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -15 & 10 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (1\text{ 行目}-3\text{ 行目}\times 2, 2\text{ 行目}-3\text{ 行目}\times 6)$$

※ テキスト定理 3.2.4：上の操作で行列式の値は不変

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -15 & 10 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (1\text{ 行目と }3\text{ 行目の入れかえ})$$

※ テキスト定理 3.2.3：行列式の値は (-1) 倍

$$= -\begin{vmatrix} -15 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

※ ここで上の性質を使った

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 55 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 55 \end{vmatrix} = \underline{55}$$

注： $-\begin{vmatrix} -15 & 10 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ は普通に 2 次の Sarrus の方法を用いてもよい。

コメント

- 今回も皆さん健闘していましたが、今回は書き方に問題のある方が多かったようです。必要に応じて減点しています。

- **<u>行列と行列式をきちんと区別</u> しましょう。**

  $$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  は「行列」であって、一方

  $$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

  は「行列式」を表します。よく似ていますが両者は全く異なる量なので気をつけましょう。今回はおまけで減点していませんが、次回から同様の間違いは減点対象とします。ちなみに

  $$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

  と書けば問題ありません。

- 行列式の定義

  $$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

  において $n = 3$ の場合を計算した方が数名。残念ながら実はこれが **Sarrus の方法そのもの**なんです。一見異なる方法に見えますが、やっていることは同じなのです（じっくり眺めていると気付くはず）。

  「4 次以上の行列式を計算する時も Sarrus の方法みたいなやり方はないのか？」というご質問をよく頂くのですが、Sarrus の方法自体が「定義をそのまま計算した」だけなので、実用的ではありません。3 次の Sarrus は 6 つの項が出てきますが、4 次の場合は 24 個、5 次の場合は 120 個も項があります。あまり覚えない方がいいでしょうね。

- 余談：行列式を表す det は determinant の略です。辞書で引くと「決定要素」、その名の通り「行列が正則かどうか」を決定するという意味です。

それでは、次回もがんばってください！