小テスト解説資料 12　　1 月 19 日（火）実施分

担当 TA： 横山 俊一（九州大学大学院数理学府：修士 2 年）

答案は返却致しません。資料に不備等ありましたら横山までお知らせください。

お知らせ

- 講義は既に終了しておりますので、答案の返却は行いません。この資料は復習の助けとしてお使いください。
- 今回の問題は、19 日の講義で「宿題」として出された問題です。

問題と解答例　10 点満点

1. 次の行列の固有値を求め、それぞれの固有ベクトルと固有空間を求めよ（8 点＋提出点 2 点）。

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- A の固有多項式を $g_A(\lambda)$ とおくと

$$\begin{aligned} g_A(\lambda) &= |\lambda E - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda+5 & 0 & -6 \\ -1 & \lambda+2 & 1 \\ 3 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-4) + 18(\lambda+2) \\ &= (\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) \\ &= (\lambda-1)(\lambda+2)^2 \end{aligned}$$

となるから、$\underline{A\text{ の固有値は } 1, -2}$ となる。

- $\lambda = 1$ のとき $\lambda E - A = E - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ である。

$\lambda = 1$ の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とすると $(E-A)v_1 = 0$, 即ち

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = 0$$

が成り立つ。これを解いて $x_1 = z_1, y_1 = 0$ となるから、固有ベクトルは $\underline{v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ （$a \in \mathbb{R}$ は任意）であり、固有空間は

$$\underline{W(1; T_A) = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}}$$

である。

- $\lambda = -2$ のとき $\lambda E - A = -2E - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ である。

  $\lambda = -2$ の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とすると $(-2E - A)v_2 = 0$, 即ち

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0$$

  が成り立つ。これを解いて $x_2 = z_2$ となるから、固有ベクトルは $\underline{v_2 = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ ($b \in \mathbb{R}$ は任意)

  であり、固有空間は

$$\underline{W(-2; T_A) = \left\{ b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in \mathbb{R} \right\}}$$

  である。

- テキスト例題 5.3.1 が参考になる。3 次元になると計算が面倒になるが、やり方は同じ。
- $|\lambda E - A|$ の計算には Sarrus の公式を使う。
- $\dim\, W(1; T_A) + \dim\, W(-2; T_A) = 1 + 1 = 2 \neq 3$ ゆえ、A は対角化不可能（テキスト定理 5.4.2：解説資料 13 も参照)。