小テスト解説資料 13（最終回）　1 月 26 日（火）実施分

担当 TA： 横山 俊一（九州大学大学院数理学府：修士 2 年）

答案は返却致しません。資料に不備等ありましたら横山までお知らせください。

お知らせ

- 講義は既に終了しておりますので、答案の返却は行いません。この資料は復習の助けとしてお使いください。
- これが最後の解説資料です。今までご覧下さった方、有難うございました。
  定期試験も頑張ってください。かげながら応援しております☆

問題と解答例　10 点満点

1. 次の行列が対角化可能かどうか調べ、可能ならば対角化せよ（8 点＋提出点 2 点）。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 途中までは解説資料 12 と同様なので一部中略：A の固有多項式を $g_A(\lambda)$ とおくと

$$\begin{aligned} g_A(\lambda) &= |\lambda E - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

となるから、A の固有値は $1, -1$ となる。

- $\lambda = 1$ のとき $\lambda E - A = E - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

$\lambda = 1$ の固有ベクトルを $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ とする. $(E-A)v_1 = 0$ を解いて, 固有空間が

$$W(1; T_A) = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

と求まる.

- $\lambda = -1$ のとき $\lambda E - A = -E - A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。

$\lambda = -1$ の固有ベクトルを $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ とする. $(-E-A)v_2 = 0$ を解いて, 固有空間が

$$W(-1; T_A) = \left\{ b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

と求まる.

- よって $\dim W(1;T_A)+\dim W(-1;T_A)=1+2=3$ ゆえ A は対角化可能 であり

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

とおけば

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

と対角化出来る。

- テキスト定理 5.4.2 が参考になる（こちらも同じく 3 次の行列）。

- 固有ベクトルの決め方がよく分からないという人へ：例えば上の $W(-1;T_A)$ は次のようにして求める。$(-E-A)v_2=0$ から、ただ一つの方程式 $-2x_2+y_2-z_2=0$ を得るから、ひとつ変数を決めて他の変数の一次結合で書いてみる。ここでは係数が 1 で整理の簡単な z_2 を選んで $z_2=-2x_2+y_2$ と書く。よって $x_2=a,\ y_2=b$ とおいて

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\-2a+b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

と計算すればよい。

- P の取り方、および対角化された行列は一意的ではない。P に関しては固有ベクトル（つまり固有空間の基底）の取り方を変えればいくらでもバリエーションがある。但し対角化された行列に関しては、固有値の順序を除くと一意に定まる。例えば

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

とした場合は

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

と対角化される。勿論どちらでも正解である。